

538
К-30

ПРОБЛЕМЫ



ФИЗИКИ

Т. КАУЛИНГ

**МАГНИТНАЯ
ГИДРОДИНАМИКА**

MAGNETOHYDRODYNAMICS

T. G. COWLING

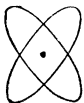
The University, Leeds, England

INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC., NEW YORK

INTERSCIENCE PUBLISHERS LTD.,

LONDON 1957

ПРОБЛЕМЫ



ФИЗИКИ

Т. Каулинг

МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

*Перевод с английского
Э. Л. БУРШТЕЙНА*

*Под редакцией
академика
М. А. ЛЕОНТОВИЧА*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1959

АННОТАЦИЯ

В книге систематически изложены основы новой области физики—магнитной гидродинамики, объектом исследования которой являются газообразные или жидкие проводящие среды. Магнитная гидродинамика приобретает все большее значение в области астрофизики, геофизики, а также в вопросах, связанных с осуществлением управляемых термоядерных реакций.

Книга рассчитана на широкий круг физиков и астрофизиков — научных работников, преподавателей, инженеров и студентов, интересующихся этой новой областью науки.

Редакция литературы по физике

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В книге Каулинга изложены основные положения магнитной гидродинамики, главным образом с учетом астрофизических применений теории. Рамки изложенных в книге вопросов достаточно ясно очерчены в предисловии автора.

Читатель, который захочет более глубоко изучить общие положения теории и их обоснование, проследить основные этапы этой быстро развивающейся области науки и познакомиться с более широким кругом ее физических применений, должен обратиться к оригинальным работам. Переводы некоторых наиболее важных работ имеются в сборниках «Проблемы современной физики», посвященных магнитной гидродинамике : вып. 1 и 2 (1954), вып. 2 (1956), вып. 7 (1957). Этим же вопросам посвящен обзор С. И. Сыроватского [Усп. физич. наук, **62**, вып. 3, 247 (1957)].

М. Леонтович

ПРЕДИСЛОВИЕ

Магнитная гидродинамика — быстро развивающаяся отрасль науки. Когда я только начинал работу над книгой, основной сферой применения магнитной гидродинамики были геофизика и астрономия; за последние несколько лет выяснилось, что эти проблемы представляют также и технический интерес. Хотя в настоящей работе основное внимание уделяется геофизическим и астрономическим приложениям, мы надеемся, что ее опубликование будет способствовать развитию как научных исследований в области магнитной гидродинамики, так и ее технических применений.

Магнитная гидродинамика описывает поведение электропроводящей среды, которая может быть жидкостью или ионизованным газом. Оба эти случая могут быть объединены в единой теории, если только ионизованный газ можно рассматривать как непрерывную жидкость. В настоящей книге мы большей частью будем считать, что это предположение выполняется. Некоторые вопросы, касающиеся поведения ионизованного газа в случаях, когда указанное предположение несправедливо, рассмотрены в книге Спитцера¹.

Мы предполагаем, что читатель знаком с уравнениями Максвелла и основными уравнениями гидродинамики. При всех расчетах мы пользовались методами векторного анализа, в том числе преобразованиями роторов и дивергенций векторов, а также выражениями для векторных

¹L. Spitzer, Jr., *Physics of fully ionized gases*, London, 1956. (Имеется перевод: Л. Спитцер, *Физика полностью ионизованного газа*, ИЛ, 1957.)

операций в цилиндрической системе координат. В библиографии, не претендующей на полноту, приведены наиболее существенные работы по материалу каждой главы.

Выражаю благодарность за разрешение воспроизвести рисунки Королевскому астрономическому обществу (за фиг. 4, 6, 9, 10), Лондонскому Королевскому обществу (за фиг. 3, 11, 12) и редакции журнала Nature (за фиг. 14). Считаю своим долгом отметить помощь моих друзей, в частности д-ра М. Саведова, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд ценных замечаний.

Т. Каулинг

Сентябрь 1956 г.
Лидс, Англия.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Введение

Магнитная гидродинамика изучает движение жидкости, обладающей электропроводностью, при наличии магнитного поля. Электрические токи, возникающие в жидкости при ее движении, меняют внешнее поле; одновременно они обуславливают механическое воздействие магнитного поля на жидкость, приводящее к изменению состояния ее движения. Эта взаимосвязь движения и поля является специфической особенностью и одновременно трудностью магнитной гидродинамики.

Магнитная гидродинамика пока находит в лабораторных экспериментах лишь небольшое применение. Ее значение полностью выявляется только при рассмотрении «космических» проблем, под которыми мы понимаем изучение ядра Земли, Солнца, звезд и межзвездного пространства. Явления, которые можно считать вторичными в лабораторных экспериментах, играют определяющую роль в космических процессах. Вследствие гигантских размеров космических проводников токи в них определяются главным образом самоиндукцией, а не электропроводностью. Поскольку в космических проблемах играют роль большие промежутки времени, даже незначительные силы электромагнитного происхождения могут привести к вполне ощутимым результатам. В силу указанных выше двух причин привычные представления, вырабатываемые в обычных лабораторных экспериментах, могут оказаться малопригодными при исследовании космических проблем.

Имеются некоторые, весьма скудные экспериментальные данные о магнитогидродинамических явлениях; это главным образом данные о движении ртути и жидкого натрия

в магнитном поле. Однако в лабораторных условиях пространственные и временные ограничения таковы, что эксперименты позволяют судить лишь об общем характере космических явлений. Поэтому часто вместо лабораторных экспериментов приходится прибегать к наблюдению самих космических явлений. Здесь, конечно, исключена возможность управляемого эксперимента; мы вынуждены ограничиться наблюдением того, что предоставляет в наше распоряжение природа. В связи с этим истолкование данных наблюдений космических явлений весьма затруднительно, а подчас и невозможно без предварительной математической обработки. В связи с этим приходится уделять значительное внимание разработке математической трактовки явлений.

В большинстве случаев здесь мы будем рассматривать жидкость как непрерывную среду. Свойства отдельных частиц жидкости учитываются лишь через вязкость, теплопроводность и электропроводность. Для разреженного ионизованного газа в магнитном поле электропроводность анизотропна; видоизменение теории для этого случая весьма кратко рассмотрено в гл. 6. Инерцией электронов мы всюду пренебрегаем; таким образом, вопрос о колебаниях плазмы выходит за рамки книги.

§ 2. Уравнения

Уравнения магнитной гидродинамики — это обыкновенные уравнения электродинамики и гидродинамики, в которых, однако, учтена связь между движением и магнитным полем. Как и в большинстве электродинамических задач, относящихся к проводникам, максвелловскими токами смещения можно пренебречь (если исключить случай быстрых колебаний). В соответствии с этим можно пренебречь накоплением заряда в уравнении непрерывности заряда и считать электрические токи замкнутыми¹. Это не означает

¹ Напомним, что Максвелл первоначально ввел токи смещения специально для того, чтобы обеспечить замкнутость полного тока в местах накопления заряда, например на пластинах конденсатора. Таким образом, пренебрегая токами смещения, мы должны, чтобы быть последовательными, пренебречь разрывом линий тока, обусловленным накоплением электрического заряда.

что электростатическое действие накапливающегося заряда несущественно; наоборот, оно играет весьма существенную роль. Но в уравнении непрерывности заряда отношение члена, характеризующего скорость изменения заряда, к другим членам, обычно имеет величину порядка v^2/c^2 , где v — скорость движения среды, а c — скорость света. Поэтому большей частью этим членом можно пренебречь.

Все электромагнитные величины будут выражаться в электромагнитной системе единиц. Если \mathbf{j} — плотность тока, а \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 4\pi \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Мы будем считать вещество немагнитным. В этом случае магнитная проницаемость μ равна единице; однако для облегчения перехода к другим единицам мы всюду в уравнениях сохраним μ . Таким образом, если \mathbf{E} — напряженность электрического поля,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если скорость движения вещества равна \mathbf{v} , то действующее электрическое поле равно $\mathbf{E} + \mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]$, так что

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]), \quad (1.3)$$

где σ — электропроводность вещества.

Гидродинамическое уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.4)$$

где ρ — плотность вещества. В уравнение движения входит объемная сила $\mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$ электромагнитного происхождения. Если, кроме нее, единственной объемной силой является сила тяжести, характеризуемая ускорением силы тяжести \mathbf{g} , то уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F} + \mu' [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]; \quad (1.5)$$

здесь p — давление, \mathbf{F} — сила вязкости (на единицу объема), а d/dt означает материальную производную

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}. \quad (1.6)$$

Для жидкости сила \mathbf{F} определяется соотношением

$$\mathbf{F} = \varrho \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.7)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. Во многих случаях, в частности при движении больших масс, силой вязкости \mathbf{F} можно пренебречь.

Для сжимаемой жидкости или газа уравнения (1.4) и (1.5) следует дополнить уравнением теплового баланса. Если обозначить через U тепловую энергию единицы массы, то это уравнение запишется в виде

$$\varrho \frac{dU}{dt} = \frac{p}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \varepsilon; \quad (1.8)$$

здесь ε характеризует полное количество тепла (в единице объема), обусловленное теплопроводностью, вязкостью и электрическим током. Обычно наиболее существенным фактором является теплопроводность, так что

$$\varepsilon = \lambda \nabla^2 T, \quad (1.9)$$

где T — температура, а λ — коэффициент теплопроводности. Уравнения (1.1)—(1.5) и (1.8) представляют собой систему уравнений магнитной гидродинамики.

§ 3. Электродинамические эффекты

Рассмотрим сначала электродинамические следствия из этих уравнений. Будем считать электропроводность σ во всех точках одинаковой.

Тогда из уравнений (1.1)—(1.3) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} \left([\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] - \frac{1}{\mu\sigma} \mathbf{j} \right) = \text{rot} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] + \eta \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (1.10)$$

где

$$\eta = \frac{1}{4\pi\mu\sigma}. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.10) определяет изменение магнитного поля. Для покоящейся среды оно дает

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{H}. \quad (1.12)$$

Это уравнение имеет вид уравнения диффузии; множитель η можно назвать коэффициентом диффузии магнитного поля.

Уравнение (1.12) показывает, что магнитное поле «просачивается» сквозь вещество от точки к точке. Затухание магнитного поля обусловлено тем, что противоположно направленные поля, просачивающиеся в различных точках, компенсируют друг друга. Учитывая размерность входящих в уравнение величин, можно сказать, что время затухания поля имеет величину порядка $L^2 \eta^{-1} = 4 \pi \mu \sigma L^2$, где L — длина порядка размеров области, занимаемой токами. Эта оценка согласуется с результатами точной теории. Так, например, наибольшее время затухания поля в однородной сфере радиуса a равно $4 \mu \sigma a^2 / \pi$.

У проводников, используемых в лабораторных условиях, время затухания поля мало; даже для медной сферы радиусом 1 м оно меньше 10 сек, однако у космических проводников, имеющих гигантские размеры, оно может быть очень велико. Если принять, что ядро Земли состоит из расплавленного железа, то, согласно вычислениям Эльзасера, время затухания земного магнитного поля будет равно 15 000 лет. По нашим оценкам, время затухания магнитного поля солнечного пятна составляет не менее 300 лет, магнитного поля Солнца — 10^{10} лет, а магнитного поля межзвездного газа в Галактике — еще во много раз больше. Вообще для больших проводящих масс линии магнитного поля лишь очень медленно просачиваются сквозь вещество.

Таковы следствия из уравнений для покоящегося вещества. В качестве второго предельного случая рассмотрим движущиеся вещества с пренебрежимо малым электрическим сопротивлением. При этом уравнение (1.10) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]. \quad (1.13)$$

Это уравнение тождественно уравнению для вихря скорости в гидродинамике невязкой жидкости; как известно, оно означает, что линии вихря движутся вместе с жидкостью. Таким образом, из уравнения (1.13) следует, что магнитное поле меняется так, как будто магнитные силовые линии жестко связаны с веществом. Действительно, можно показать, что (1.13) является условием постоянства магнитного потока, пронизывающего контур, каждая точка которого движется с локальной скоростью v . Этого и следовало ожидать. При движении вещества в магнитном поле индуцируемое электрическое поле, грубо говоря, обусловлено движением вещества относительно магнитных силовых линий. Так как мы считаем электрическое сопротивление пренебрежимо малым, то индуцируемая э. д. с. должна быть равна нулю и, следовательно, вещество не должно двигаться относительно магнитных силовых линий. Следуя Альфвену, мы будем считать, что магнитное поле «вморожено» в вещество. Движение вдоль силовых линий не сказывается на поле; при движении же в поперечном направлении силовые линии перемещаются вместе с веществом.

Если ни одним из членов в правой части уравнения (1.10) нельзя пренебречь, то изменение магнитного поля во времени складывается из двух частей, определяемых уравнениями (1.12) и (1.13). Таким образом, силовые линии стремятся двигаться вместе с веществом и одновременно просачиваются сквозь вещество. Обозначим опять через L характерный размер области, занимаемой полем, а через V характерную скорость точек системы. Эффект переноса поля вместе с веществом преобладает над просачиванием поля при $LV \gg \eta$. По аналогии с определением обычного числа Рейнольдса

$$R = \frac{LV}{\nu}, \quad (1.14)$$

можно определить магнитное число Рейнольдса

$$R_M = \frac{LV}{\eta}. \quad (1.15)$$

Таким образом, перенос поля вместе с веществом преобладает над его просачиванием при $R_M \gg 1$.

В лабораторных условиях это требование выполняется лишь в редких случаях (для ртути $\eta \sim 8 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{сек}$). Наоборот, для космических масс, размеры которых очень велики, оно легко выполняется. Так, например, для Солнца η меняется от $10^8 \text{ см}^2/\text{сек}$ в фотосфере до $10^2 \text{ см}^2/\text{сек}$ в центре, L может быть порядка 10^8 см , а V — порядка $10^5 \text{ см}/\text{сек}$. Таким образом, в лабораторных условиях магнитные силовые линии легко перемещаются в проводнике, в то время как в космических массах просачивание играет очень малую роль и силовые линии можно считать почти вмерзшими в вещество.

Это означает, что в лабораторных условиях электрические токи в проводниках определяются преимущественно электропроводностью σ , тогда как в космических массах величина σ непосредственно почти не влияет на электрический ток. В последнем случае резкое изменение σ не вызывает заметного изменения магнитного поля \mathbf{H} (и тока \mathbf{j}); оно скажется лишь на втором члене в правой части уравнения (1.10), который значительно меньше первого. В лабораторных же условиях обычно электрическое поле и проводимость определяют ток, который в свою очередь определяет магнитное поле. Для космических масс причинная связь является обратной: изменение магнитного поля определяется почти полностью уравнением (1.13); зная магнитное поле, можно с помощью уравнения (1.1) найти токи; электропроводность нужно знать лишь для определения электрического поля $\mathbf{E} + \mu[\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]$ (очень слабого), необходимого для существования токов. Отсюда ясно, что представления, полученные на основании лабораторных опытов, можно лишь очень осторожно переносить на космические явления.

1. Вмороженные поля. Здесь мы приведем для справок некоторые общие результаты, относящиеся к вмороженному в вещество полю. Используя уравнение непрерывности и условие $\text{div } \mathbf{H} = 0$, можно переписать уравнение (1.13), определяющее изменение поля, в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \text{ grad} \right) \mathbf{v}, \quad (1.16)$$

где d/dt — материальная производная, определяемая формулой (1.6). Это уравнение (впервые полученное Валеном [5])

можно проинтегрировать и найти изменение магнитного поля, обусловленное заданным движением вещества. Однако, как показал Вален, физический смысл уравнения (1.16) можно выяснить и непосредственно.

Пусть dS — нормальное сечение магнитной силовой трубки. Поток HdS должен, очевидно, оставаться постоянным в процессе движения. Обозначим через dl расстояние вдоль силовой линии между двумя соседними сечениями. В процессе движения масса $\rho dldS$, заключенная между этими двумя сечениями, также должна оставаться постоянной. Таким образом, $H \sim \rho dl$. Это означает, что если при движении силовые линии растягиваются, то одновременно возрастает величина H/ρ . Если вектор, соединяющий две соседние точки силовой линии, обозначить через $\varepsilon \mathbf{H}/\rho$, то ε будет оставаться постоянным при движении этих точек вместе с веществом. Пусть радиус-вектор \mathbf{r} какой-либо материальной точки по истечении некоторого времени стал равным \mathbf{r}' , а \mathbf{H} и ρ приняли соответственно значения \mathbf{H}' и ρ' . Тогда $\varepsilon \mathbf{H}'/\rho'$ дает приращение \mathbf{r}' , соответствующее первоначальному приращению $\varepsilon \mathbf{H}/\rho$ вектора \mathbf{r} . Отсюда следует, что

$$\frac{\mathbf{H}'}{\rho'} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \operatorname{grad} \right) \mathbf{r}'; \quad (1.17)$$

это выражение и является интегралом уравнения (1.16). Непосредственный вывод (1.17) из (1.16) проведен Лундквистом и Паркером.

2. Магнитная энергия. Магнитное поле обладает энергией $\mu H^2/8\pi$ в единице объема. Таким образом, полная энергия магнитного поля W_H равна

$$W_H = \frac{1}{8\pi} \int \mu H^2 d\tau; \quad (1.18)$$

здесь интегрирование производится по объему, занимаемому магнитным полем. В соответствии с уравнением (1.10) скорость изменения магнитной энергии равна

$$\frac{dW_H}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \mu (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] + \eta \mathbf{H} \cdot \nabla^2 \mathbf{H}) d\tau. \quad (1.19)$$

Преобразуем второй член полученного выражения следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \mu \eta \mathbf{H} \cdot \nabla^2 \mathbf{H} d\tau &= -\eta \int \mu \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{j} d\tau = \\ &= -\eta \int \left(\text{div} [\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}] + \mu \mathbf{j} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \right) d\tau = -\int \frac{j^2}{\sigma} d\tau. \end{aligned}$$

(Согласно теореме Грина, первый член в круглых скобках исчезает при интегрировании¹.) Таким образом, член, содержащий η в уравнении (1.19), дает часть энергии магнитного поля, переходящую в джоулево тепло (j^2/σ на единицу объема).

Аналогичным путем преобразуем член, пропорциональный \mathbf{v} , в правой части уравнения (1.19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int (\text{div} [[\mathbf{v} \cdot \mu \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H}] + [\mathbf{v} \cdot \mu \mathbf{H}] \cdot \text{rot } \mathbf{H}) d\tau = \\ = -\int \mathbf{v} \cdot [\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}] d\tau \end{aligned}$$

(член с дивергенцией, как и раньше, обращается в нуль после интегрирования). Таким образом, этот член дает работу, совершаемую веществом против сил магнитного поля $[\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}]$.

Этот член проще всего истолковать с помощью максвеллова тензора напряжений. Согласно уравнению (1.1),

$$[\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}] = -\text{grad} \left(\frac{\mu H^2}{8\pi} \right) + \text{div} \left(\frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \right), \quad (1.20)$$

где последний член означает дивергенцию диады². Уравнение (1.20) показывает, что сила $[\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}]$ эквивалентна гидростатическому давлению $\mu H^2/8\pi$ и натяжению $\mu H^2/4\pi$

¹ Если поле простирается до бесконечности, то применение теоремы Грина приводит к появлению интеграла по бесконечно удаленной сфере. Чтобы этот интеграл обращался в нуль, достаточно предположить, что плотность тока отлична от нуля лишь в некотором конечном объеме.

² Диадой \mathbf{AB} называется тензор с составляющими $A_i B_k$. — Прим. перев.

вдоль силовой линии. Указанные величины соответствуют натяжению $\mu H^2/8\pi$ вдоль силовой линии и сжатию такой же величины в перпендикулярном направлении, как обычно и представляют максвелловы натяжения.

Если при движении не происходит изменения плотности, то гидростатическое давление не производит работы. Изменение магнитной энергии обусловлено лишь работой против сил натяжения $\mu H^2/4\pi$ вдоль силовых линий; за счет растяжения силовых линий энергия магнитного поля увеличивается. Это согласуется с полученными выше результатами.

При равномерном расширении вещества работа, совершаемая гидростатическим давлением $\mu H^2/8\pi$, больше работы, совершаемой против сил натяжения $\mu H^2/4\pi$ (они относятся, как 1:2). Поэтому равномерное расширение приводит к уменьшению магнитной энергии; грубо говоря, магнитные силовые линии отдаляются друг от друга и соответственно уменьшается магнитное поле.

§ 4. Механические эффекты

Механическая сила $[\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}]$, имеющая электромагнитное происхождение, перпендикулярна магнитному полю; поэтому она непосредственно не влияет на движение вдоль силовых линий. Влияние этой силы на движение в направлении, перпендикулярном силовым линиям, различно в зависимости от того, могут ли силовые линии перемещаться в веществе или же они заморожены в него.

Случай 1. Сопротивлением среды пренебречь нельзя. В соответствии с формулой (1.3)

$$[\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}] = \mu \sigma [(\mathbf{E} + [\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]) \cdot \mathbf{H}] = \mu \sigma ([\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{H}] - \mu H^2 v_t),$$

где \mathbf{E}_t , v_t — составляющие \mathbf{E} и \mathbf{v} , перпендикулярные магнитному полю. Пользуясь этим соотношением, можно представить уравнение (1.5) в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{P} + \mu \sigma ([\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{H}] - \mu H^2 v_t), \quad (1.21)$$

где \mathbf{P} — сумма объемных сил неэлектромагнитного происхождения. Из уравнения (1.21) следует, что в том случае,

когда величинами \mathbf{P} и \mathbf{E}_t можно пренебречь, движение в направлении, перпендикулярном силовым линиям, затухает вследствие индукционного торможения, причем время затухания определяется выражением

$$\tau = \frac{\rho}{\sigma \mu^2 \bar{H}^2} . \quad (1.22)$$

Время затухания τ в лабораторных условиях сравнительно мало; для ртути при поле напряженностью 1200 эрстед оно меньше 1 сек. Таким образом, индукционное торможение проявляется как магнитная «вязкость», препятствующая движению перпендикулярно силовым линиям. Будем считать, что L и V имеют тот же смысл, как и в формулах (1.14) и (1.15), и обозначим через \bar{H} поле, равное по порядку величины полю в реальной системе. Тогда действующая на единицу объема сила, обусловленная магнитной вязкостью, будет иметь величину порядка $\mu^2 \sigma \bar{H}^2 V$, а сила, обусловленная обычной вязкостью, будет равна $\rho \nu V / L^2$ [см. формулу (1.7)]. Таким образом, магнитная вязкость преобладает в том случае, когда величина M , равная

$$M = \mu \bar{H} L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} , \quad (1.23)$$

будет много больше единицы. Значение числа M было впервые выяснено в работе Гартмана [2] по течению в каналах, поэтому его можно назвать числом Гартмана.

Если величинами \mathbf{P} и \mathbf{E}_t пренебречь нельзя, удобно рассматривать скорость перемещения силовых линий. Она определена точно лишь в том случае, когда силовые линии вморожены в вещество. При этом вследствие бесконечной проводимости

$$\mathbf{E} + \mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] = 0 ,$$

так что \mathbf{E} сводится к поперечной составляющей \mathbf{E}_t . Обобщая это уравнение, мы будем, по определению, считать скорость

\mathbf{w} магнитных силовых линий всегда перпендикулярной \mathbf{H} и удовлетворяющей соотношению

$$\mathbf{E}_t + \mu [\mathbf{w} \cdot \mathbf{H}] = 0, \quad (1.24a)$$

откуда

$$\mathbf{w} = \frac{[\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{H}]}{\mu H^2}. \quad (1.24b)$$

Уравнение (1.21) показывает, что при $\mathbf{P} = 0$ поперечная скорость движения вещества \mathbf{v}_t за время порядка времени τ , определяемого формулой (1.22), достигает значения, близкого к скорости движения магнитных силовых линий \mathbf{w} . Следовательно, механические силы и в этом случае приводят к затуханию поперечного движения вещества относительно силовых линий. Из соображений размерности следует ожидать, что время, в течение которого скорость вещества изменится на заметную величину (соизмеримую с самой скоростью), должно быть порядка L/V . Таким образом, движение вещества относительно силовых линий в перпендикулярном направлении будет, по-видимому, играть сколько-нибудь заметную роль лишь в том случае, когда мала величина N , определяемая соотношением

$$N = \frac{L}{V\tau} = \frac{\mu^2 H^2 \sigma L}{V\varrho}. \quad (1.25)$$

При $\mathbf{P} \neq 0$ движение вещества относительно силовых линий в перпендикулярном к ним направлении не будет затухать; скорость этого движения стремится к предельному значению, определяемому соотношением

$$\mathbf{P}_t = \sigma \mu^2 H^2 (\mathbf{v}_t - \mathbf{w}).$$

Это означает, что под действием сил \mathbf{P} вещество перемещается перпендикулярно силовым линиям как раз с такой скоростью, при которой данная сила уравновешивается индукционным торможением.

Случай 2. Сопротивлением среды можно пренебречь. Если силовые линии магнитного поля заморожены в веществе, появляется целый ряд своеобразных моментов. В этом случае токи определяются не соотношением (1.3), а уравнениями

(1.1). Механическую силу $[\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}]$, действующую на токи, проще всего представлять с помощью максвелловых напряжений как давление $\mu H^2/8\pi$ в направлении, перпендикулярном силовым линиям, и такой же величины натяжение вдоль силовых линий. Это приводит к трем основным явлениям:

а) вследствие наличия бокового давления пучок силовых линий сопротивляется сжатию в поперечном направлении;

б) продольное натяжение приводит к тому, что силовые линии стремятся сократиться, насколько это позволяет механическое сопротивление вещества сжатию;

в) благодаря наличию обеих этих сил при отклонении силовой линии от равновесного положения возникает восстанавливающая сила, вызывающая колебания силовой линии вокруг равновесного положения. Сила $[\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}]$ всегда перпендикулярна магнитному полю \mathbf{H} , так что восстанавливающая сила придает силовым линиям своего рода жесткость.

Как и в случае 1, магнитное поле, грубо говоря, препятствует движению вещества. Однако в случае 1 магнитное поле действует пассивно, т. е. просто тормозит вещество, тогда как в случае 2 оно играет активную роль, а именно силовая линия действует, как сжатая пружина. Магнитное поле всегда препятствует образованию турбулентностей в проводящей жидкости; однако при наличии замороженного магнитного поля могут наблюдаться некоторые аномальные эффекты.

Иногда удобнее представлять максвелловы напряжения не как поперечное давление и продольное натяжение, а как гидростатическое давление $\mu H^2/8\pi$ и натяжение $\mu H^2/4\pi$ вдоль силовых линий. В жидкости обусловленное магнитным полем гидростатическое давление $\mu \bar{H}^2/8\pi$ часто бывает несущественным, так как оно уравнивается соответствующим уменьшением гидростатического давления самой жидкости. Таким образом, величина магнитных напряжений характеризуется натяжением $\mu \bar{H}^2/4\pi$. Силы инерции, входящие в уравнение движения, эквивалентны напряжениям порядка ρV^2 . Поэтому отношение магнитных сил к силам инерции характеризуется величиной S , равной

$$S = \frac{\mu \bar{H}^2}{4\pi\rho V^2}. \quad (1.26)$$

Эта величина одновременно определяет отношение плотности магнитной энергии $\mu \bar{H}^2/8\pi$ к плотности кинетической энергии вещества $\rho V^2/2$.

Число S является мерой относительного влияния магнитного поля и состояния движения при наличии вмороженного поля. При малых значениях S магнитное поле почти не влияет на движение; при больших значениях S движение почти полностью определяется магнитным полем; при S порядка единицы магнитное поле и движение взаимодействуют на равных правах и между этими двумя факторами устанавливается нечто вроде равномерного распределения энергии. Таким образом, величина S имеет определяющее значение.

Введенные в этом параграфе безразмерные числа M и N [формулы (1.23) и (1.25)] можно выразить через число S и числа Рейнольдса R и R_M :

$$M^2 = SRR_M, \quad N = SR_M. \quad (1.27)$$

§ 5. Параллельное течение

В качестве простого примера применения изложенных выше положений рассмотрим ламинарное течение однородной проводящей жидкости между двумя покоящимися плоскостями в однородном магнитном поле. Пусть плоскости расположены при $z = \pm L$, скорость v направлена по оси x , а магнитное поле H_0 перпендикулярно ограничивающим плоскостям, т. е. параллельно оси Oz . Поскольку вблизи средней плоскости $z = 0$ жидкость движется быстрее, чем у краев, она стремится вытянуть силовые линии в направлении движения. Поэтому в поле имеется составляющая H_x , параллельная движению; в общем случае имеется также однородное электрическое поле E , направленное по оси Oy .

Учитывая вязкость, но пренебрегая силой тяжести, мы получаем следующее уравнение стационарного движения:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu j_y H_0 + \rho v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

При этом

$$j_y = \sigma (E - \mu' v H_0),$$

$$4\pi j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z}.$$

В последних уравнениях v , j_x и H_x зависят лишь от z , а градиент давления $-\partial p/\partial x \equiv P$ одинаков во всех точках жидкости. Таким образом,

$$0 = P + \mu\sigma H_0 (E - \mu v H_0) + \rho v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (1.28)$$

Учитывая граничные условия $v = 0$ на стенках, получаем решение этого уравнения

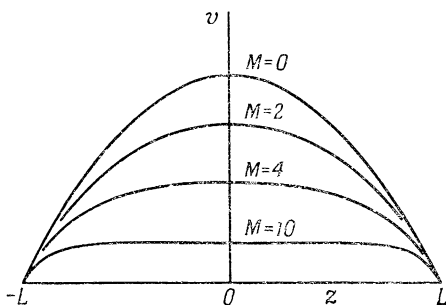
$$v = \left(\frac{E}{\mu H_0} + \frac{P}{\mu^2 \sigma H_0^2} \right) \left(1 - \frac{\text{ch}(Mz/L)}{\text{ch} M} \right), \quad (1.29)$$

где

$$M = \mu H_0 L \left(\frac{\sigma}{\nu \rho} \right)^{1/2} \quad (1.30)$$

[ср. с формулой (1.23)].

Профили скоростей, соответствующие различным значениям M , приведены на фиг. 1. При малых значениях M



Фиг. 1. Профили скоростей для течения жидкости в магнитном поле, соответствующие различным значениям числа M .

Кривые рассчитаны по формуле (1.31) для постоянного значения P .

вязкость преобладает над индукционным торможением и профиль скоростей близок в параболу. Наоборот, при больших значениях M вязкость не играет существенной роли, если не учитывать тонкий слой, прилегающий к стенкам.

Вдали от стенок скорость v почти постоянна и равна сумме $E/\mu H_0$ (скорости перемещения силовых линий) и $P/\mu^2\sigma H_0^2$ (скорости, при которой градиент давления P уравнивается индукционным торможением, обусловленным движением жидкости в направлении, перпендикулярном силовым линиям).

В действительности опыты по исследованию течения проводящих жидкостей выполняются с трубами круглого или прямоугольного сечения. В последнем случае можно ожидать, что картина течения будет близка к картине между двумя плоскостями, если одна из сторон прямоугольника много больше другой, а магнитное поле перпендикулярно длинной стороне. Возникающее в трубе электрическое поле, обусловленное тем, что боковые стенки препятствуют токам, неоднородно. Для приближенного учета этого обстоятельства выберем однородное поле E , входящее в формулу (1.29), так, чтобы полный ток $\int j_y dz$ на участке от $z = -L$ до $z = +L$ был равен нулю. Это дает

$$(P + \mu E \sigma H_0) \operatorname{th} M = PM.$$

Тогда формула (1.29) примет вид

$$v = \frac{PM}{\mu^2\sigma H_0^2} \frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch}(Mz/L)}{\operatorname{sh} M}. \quad (1.31)$$

Среднее значение V скорости v для $-L < z < +L$ равно

$$V = \frac{P}{\mu^2\sigma H_0^2} (M \operatorname{cth} M - 1). \quad (1.32)$$

Соответствующее значение H_x равно

$$H_x = \frac{4\pi PL}{\mu H_0} \left[\frac{\operatorname{sh}(Mz/L)}{\operatorname{sh} M} - \frac{z}{L} \right]. \quad (1.33)$$

Отметим, что H_x обращается в нуль на границах $z = \pm L$, так как магнитное поле непрерывно. Вводя магнитное число Рейнольдса

$$R_M = \frac{LV}{\eta} = 4\pi\mu\sigma LV,$$

получаем

$$H_x = H_0 R_M \frac{\text{sh}(Mz/L) - (z/L) \text{sh} M}{M \text{ch} M - \text{sh} M}. \quad (1.34)$$

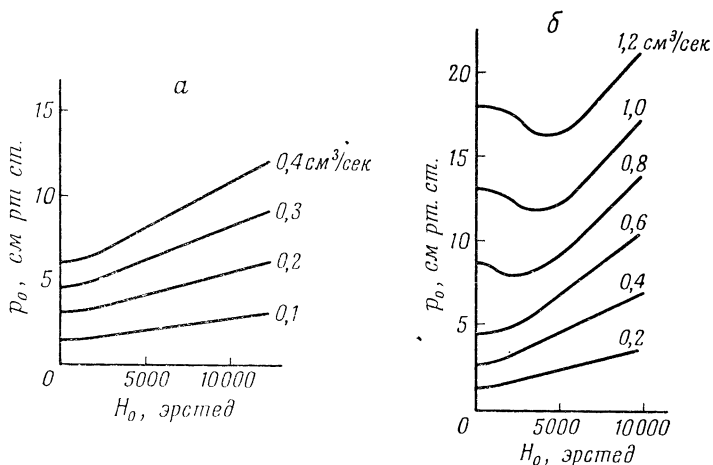
Стоящая справа дробь всегда конечна и стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$. Таким образом, при малом R_M составляющая магнитного поля H_x мала по сравнению с H_0 и искажение силовых линий течением невелико. Это условие обычно выполняется при лабораторных опытах с ртутью, так как для нее η велико ($\sim 8 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{сек}$).

Сравнение с экспериментальными данными. Гартман и Лазарус [2] экспериментально определили зависимость полного потока ртути по трубе от перепада давления и магнитного поля (которые пропорциональны соответственно P и M). При малых значениях M правая часть формулы (1.32) почти не зависит от величины H_0 , так как она приблизительно пропорциональна PM^2/H_0^2 . Наоборот, для больших значений M она приближается к $PL^2/\rho \nu M$. Таким образом, из (1.32) следует, что перепад давления, необходимый для достижения заданного полного потока жидкости, при малых магнитных полях почти не зависит от величины поля, а при больших приблизительно пропорционален полю. При постоянном магнитном поле поток пропорционален перепаду давления.

Полученные выводы в основном согласуются с экспериментальными данными для труб малого сечения. Но для больших сечений наблюдаются неожиданные отклонения, особенно при малых полях (фиг. 2). Это, по-видимому, обусловлено тем, что течение перестает быть ламинарным. Возникающая в больших магнитных полях вязкость может воспрепятствовать возникновению турбулентности. Таким образом (как видно из фиг. 2), наложением магнитного поля средней величины можно даже уменьшать величину перепада давления, необходимого для поддержания заданного потока жидкости, несмотря на то, что при этом возникает индукционное торможение.

Мургатройд [4] измерял поток ртути в трубе с прямоугольным сечением $10 \times 0,675 \text{ см}^2$. Его методика отличалась от примененной Гартманом и Лазарусом тем, что градиент давления измерялся непосредственно, для чего в

одной из стенок были сделаны небольшие отверстия. Полученные им результаты в общем согласуются с данными Гартмана и Лазаруса, но вследствие большего сечения трубы в опытах Мургатройда турбулентность сказывалась сильнее. Были исследованы значения M до 130, причем числа Рейнольдса $R = LV/\nu$ менялись от $2,5 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^4$



Ф и г. 2. Экспериментальные значения перепада давления p_0 , необходимого для обеспечения заданного потока жидкости (ртути) в трубе прямоугольного сечения размером $0,291 \times 5,08 \text{ мм}^2$ (случай *а*) и $0,60 \times 3,72 \text{ мм}^2$ (случай *б*) при наложении магнитного поля H_0 , параллельного короткой стороне сечения.

На верхних кривых на фиг. 2, *б* сказывается турбулентность при малых значениях H_0 . Цифры на кривых дают величину потока в $\text{см}^3/\text{сек}$.

Для больших значений M из формулы (1.32) следует, что приближенно

$$\frac{PL}{\rho V^2} = \frac{M}{R}.$$

Данные Мургатройда согласуются с полученной формулой при $R < 225 M$; отсюда видно, что при указанном условии турбулентность отсутствует. Для больших значений R/M (приблизительно до 400) Мургатройд нашел, что, хотя величина $PL/\rho V^2$ уже не равна M/R , она по-прежнему остается функцией лишь от этого отношения.

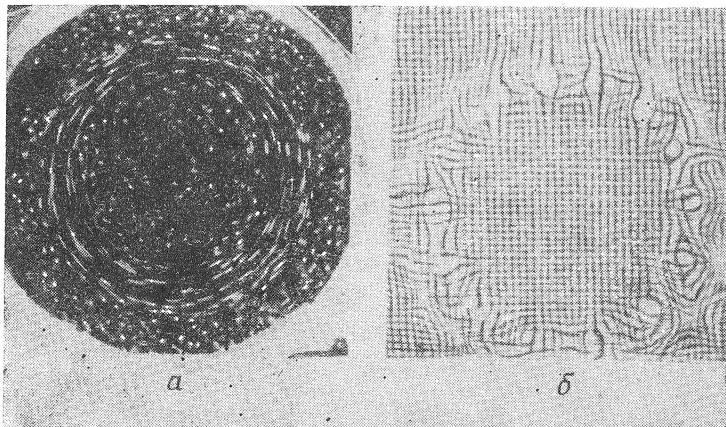
Ленерт [3] предположил, что большой градиент скорости в граничном слое у стенок трубы может сам по себе привести к турбулентности вблизи стенок при больших M . Однако экспериментальные данные не дают указаний на турбулентность такого рода; точная теория также показывает, что граничный слой рассматриваемого типа не способствует образованию турбулентности.

Упомянем, что Ленерт исследовал сопротивление относительно вращению двух коаксиальных цилиндров, пространство между которыми заполнялось ртутью, при наличии магнитного поля, параллельного оси цилиндров. Вследствие краевых эффектов движение жидкости не обладает цилиндрической симметрией; по-видимому, почти во всех исследованных случаях имела место турбулентность. Но и при таких условиях магнитное поле умеренной величины уменьшало сопротивление вращению; это показывает, что поле стремится воспрепятствовать турбулентности.

§ 6. Магнитная жесткость

Производя опыты с ртутью, находящейся в вертикальном магнитном поле, Ленерт наглядно показал жесткость, возникающую при наложении магнитного поля. На дне неглубокого сосуда с ртутью располагался горизонтальный медный диск, окруженный двумя концентрическими медными кольцами. Внутреннее кольцо отделялось небольшими вертикальными зазорами от диска и наружного кольца, так что диск и оба кольца образовывали один почти сплошной большой диск. Внутреннее кольцо равномерно вращалось вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью кольца; диск и внешнее кольцо были неподвижны. В сильном магнитном поле ртуть вследствие магнитной жесткости будет двигаться вслед за поверхностью, расположенной непосредственно под ней. Благодаря наличию вязкости слой ртути, непосредственно прилегающий к какой-либо из медных поверхностей, будет следовать за движением этой поверхности. Движение вышележащих слоев определяется тем, что магнитные силовые линии как бы увлекаются этим «граничным слоем» и благодаря своей жесткости увлекают за собой ртуть, расположенную над ним, так что она движется почти с той же скоростью.

Действительно, опыты показали, что на поверхности ртути участок, расположенный между двумя концентрическими окружностями, двигался со скоростью, приблизительно равной скорости внутреннего кольца; остальная



Ф и г. 3. Фотографии, полученные в опытах Ленерта, иллюстрирующие магнитную жесткость ртути в поле напряженностью 4300 эрстед.
[Proc. Roy. Soc., 233A, 301 (1955)]

а — фотографии песчинок, рассеянных по поверхности ртути; движение происходит лишь в кольце, в котором изображения движущихся песчинок имеют вид дуг;
б — фотография отражения проволочной решетки от поверхности ртути, иллюстрирующая образование вихревых «дорожек».

часть ртути была почти неподвижна. Переход от движущейся к неподвижным частям ртути был очень резким, так что в переходной зоне ламинарное движение распалось на цилиндрические «дорожки» вихрей (фиг. 3).

Граничные слои, подобные таким переходным зонам или слоям у стенок трубы, обусловлены наличием твердых тел. При рассмотрении космических проблем вопрос о наличии твердых тел отпадает, так что здесь нет причин к образованию таких слоев. Космические условия отличаются от лабораторных и в другом отношении, а именно, электрическим токам в первом случае редко препятствуют какие-либо непроводящие границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. The Sun, ed. G. Kuiper, Chicago, 1954, Ch. 8. (Имеется перевод : «Солнце», под ред. Койпера, ИЛ, 1957.)
2. Hartmann J., Lazarus F., Kong. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., **15**, No. 6 and 7 (1937).
3. Lehnert B., Ark. Fys., **5**, 69 (1952).
4. Murgatroyd W., Phil. Mag., **44**, 1348 (1955).
5. Walén C., Ark. Mat. Astr. Fys., **33A**, No. 18 (1946).

Глава 2

МАГНИТНАЯ ГИДРОСТАТИКА

§ 1. Задачи магнитной гидростатики

Как указывалось в § 3 гл. 1, во многих космических проблемах можно считать, что силовые линии магнитного поля вморожены в вещество, как если бы электропроводность вещества была бесконечна. Таким образом, возможны состояния равновесия, в которых обычные механические силы уравниваются магнитными напряжениями. Здесь мы рассмотрим несколько случаев такого равновесия, с которыми приходится встречаться при исследовании солнечных пятен, протуберанцев, солнечной короны и туманностей.

Вопрос о механическом равновесии солнечного пятна представляет собой серьезную теоретическую проблему. Солнечное пятно холоднее остальной поверхности Солнца (его температура 4500°K , тогда как температура остальной части поверхности 5800°K). Поэтому, чтобы на заданном уровне давление было одинаково вне пятна и внутри него, вещество солнечного пятна должно быть более плотным и, следовательно, должно стремиться оседать вниз. Вследствие этого пятно должно исчезнуть под поверхностью Солнца за время порядка нескольких минут. Между тем большие солнечные пятна существуют неделями. Выдвигалось предположение, что длительное существование пятен обусловлено вращением, т. е. что пятно представляет собой солнечный смерч, в котором вещество держится за счет центробежных сил. Однако, как теперь известно, значения угловых скоростей в солнечных пятнах недостаточны для обеспечения равновесия; следовательно, должны существовать еще какие-то дополнительные силы. Поскольку сол-

нечное пятно обладает сильным магнитным полем, которое может достигать 2000—3000 эрстед для больших пятен, равновесие пятна, по-видимому, можно объяснить, учитывая магнитные силы.

Солнечные протуберанцы представляют собой образования различной формы, часто нитеобразной или дугообразной, которые кажутся висящими в течение длительного времени над поверхностью Солнца. Конечно, их внешний вид может быть обманчив. Киносъемка протуберанцев показывает, что, хотя их форма почти не меняется, в них происходит непрерывное перемещение вещества. Так, например, в некоторых случаях вещество многократно извергается из поверхности Солнца вдоль определенных искривленных траекторий, а затем возвращается по тому же пути. Протуберанцы находятся не в пустоте: они окружены веществом солнечной короны, хотя это и трудно заметить, так как, несмотря на свою значительно более высокую температуру (1 000 000° К), корона не дает заметного видимого излучения¹. Тем не менее устойчивая форма протуберанцев нуждается в объяснении. Поскольку протуберанцы часто связаны с солнечными пятнами, их иногда объясняют магнитными факторами.

Солнечная корона обладает своего рода волокнистой структурой. В частности, вблизи полюсов наблюдаются «перья», сильно напоминающие по форме силовые линии намагниченной сферы. Именно вид этих перьев навел впервые на мысль о том, что Солнце обладает некоторым общим магнитным полем. Чтобы можно было объяснить существование этих перьев магнитными факторами, необходим механизм, обеспечивающий сосуществование столбов с различной плотностью вещества.

О влиянии магнитного поля на газовые облака Галактики или спиральных ветвей туманностей мы заключаем не по каким-то особенностям их поведения, а по встречающейся иногда волокнистой структуре. Однако ряд соображений говорит о наличии магнитного поля, которое нужно учитывать при рассмотрении равновесия.

¹ Это объясняется высокой прозрачностью полностью ионизованной горячей плазмы. — *Прим. перев.*

§ 2. Равновесие солнечных пятен

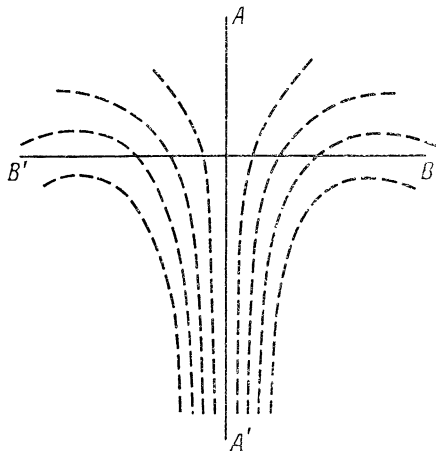
Рассмотрим, следуя Альфвену, влияние вертикального магнитного поля на равновесие проводящей атмосферы. Пусть напряженность поля постоянна вдоль силовой линии, но меняется от линии к линии. Поскольку натяжение каждой линии постоянно вдоль нее, оно не приводит к объемным силам; влияние магнитного поля сводится к боковому давлению $\mu H^2/8\pi$.

Пусть поле ограничено некоторой цилиндрической областью. Тогда при равновесии давление газа p в цилиндре должно быть меньше на $\mu H^2/8\pi$, чем в окружающем объеме на том же уровне, вследствие наличия магнитного давления. Поскольку H не зависит от высоты z , отсчитываемой вдоль любой силовой линии, величина $\partial p/\partial z$ на одном и том же уровне одинакова как внутри, так и вне цилиндра. Но $\partial p/\partial z = -g\rho$, следовательно, такое же заключение можно сделать и относительно плотности ρ . Далее, $p \sim \rho T$, так что при равновесии не только давление, но и температура внутри цилиндра должны быть меньше, чем снаружи. Различие в температурах становится заметным в том случае, когда магнитное давление $\mu H^2/8\pi$ сравнимо с давлением газа p .

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно прийти к правдоподобному объяснению механического равновесия солнечных пятен. Примем, что плотность вещества солнечного пятна не превышает плотности вещества, окружающего пятно (на том же уровне). Тогда меньшей температуре пятна будет соответствовать меньшее давление; однако эта разность давлений возмещается магнитным давлением. При этом предполагается, что под видимым нам солнечным пятном находится более или менее вертикальный пучок силовых линий магнитного поля, давление которого препятствует проникновению внутрь пятна более горячего окружающего вещества и опусканию солнечного пятна вниз.

Для поля напряженностью 2000 эрстед магнитное давление равно $1,6 \cdot 10^5$ дин/см². Эта величина вполне соизмерима с давлением газа, как и должно быть для того, чтобы существовало заметное различие между температурой пятна и окружающего вещества; в фотосфере вне пятна давление имеет величину порядка 10^5 дин/см². В поверхностных

слоях нельзя уже считать, что силовые линии магнитного поля вертикальны; магнитное давление слишком велико, оно расталкивает окружающее вещество, так что в состоянии равновесия силовые линии выгнуты наружу (фиг. 4).



Фиг. 4. Возможная форма силовых линий в вертикальной плоскости, проходящей через ось AA' солнечного пятна (BB' — поверхность Солнца).

Это согласуется с данными наблюдений. Имеются также некоторые указания на то, что в местах солнечных пятен поверхность Солнца несколько ниже, чем в остальной части, как и должно быть, если считать, что уменьшение давления в пятне частично обусловлено уменьшением плотности.

Поскольку силовые линии начинают расходиться вблизи поверхности Солнца, поле и магнитное давление непосредственно под поверхностью должны быть больше, чем на самой поверхности. Если радиус пучка силовых линий непосредственно под поверхностью составляет $\frac{2}{3}$ от радиуса пучка на самой поверхности, то магнитное поле под поверхностью в 2,25 раза больше, чем на поверхности, а магнитное давление в 5 раз больше.

Однако нельзя ожидать, что поле будет вызывать существенные механические эффекты при давлениях p , превышающих, скажем, 10^8 дин/см². Поскольку такое давление соот-

ветствует глубине всего в несколько тысяч километров, солнечное пятно, согласно этой теории, должно возникать лишь вследствие поверхностного охлаждения.

§ 3. Лучи и волокна в солнечной атмосфере

Для объяснения лучей и волокон в солнечной атмосфере выдвигались две различные гипотезы. Согласно первой (теория магнитной дуги), волокна идут вдоль силовых линий интенсивного магнитного поля. Согласно второй (теория токовых шнуров), волокна представляют собой траектории электрических токов с локальными магнитными полями.

Теория магнитной дуги. В теории магнитной дуги предполагается, что магнитные напряжения велики по сравнению с давлением газа. Так, например, в первоначально вертикальном и однородном поле повышение плотности газа в каком-либо вертикальном столбе просто приводит к некоторому боковому расширению силовых линий, которое будет происходить до тех пор, пока снижение магнитного давления не скомпенсирует повышение давления газа. Так можно объяснить наличие перьев в полярной области солнечной короны. Давление газа у основания короны меньше $0,05 \text{ дин/см}^2$, а по мере увеличения высоты становится еще меньше. Поэтому достаточно поля напряженностью 1 эрстед, чтобы поддерживать форму полярных перьев. Последние наблюдения эффекта Зеемана показали, что поле у полюсов Солнца действительно имеет величину порядка 1—2 эрстед.

Волокна протуберанцев объясняются несколько иначе, так как они часто бывают ближе к горизонтальному, чем к вертикальному направлению. В этом случае сила тяжести, действующая на массу нити, уравнивается силами, возникающими за счет искажения силовых линий под действием тяжести. Магнитные напряжения $\mu H^2/8\pi$ приводят к дополнительной объемной силе с плотностью порядка $\kappa \mu H^2/8\pi$, где κ — изменение кривизны силовых линий. Для обеспечения равновесия изменение кривизны должно происходить так, чтобы выполнялось соотношение $\kappa \mu H^2/8\pi \sim \rho g$. Принимая значения ρg и $1/\kappa$ равными соответственно $5 \cdot 10^{-9} \text{ дин/см}^3$ и 200 000 км, находим, что H должно быть порядка 50 эрстед. Поля такой величины вполне возможны вблизи

солнечных пятен. Таким образом, сравнительно постоянную форму протуберанцев можно объяснить магнитной жесткостью.

Иногда протуберанец имеет такой вид, как будто он расположен в углублении, образуемом группами силовых линий, благодаря чему такой протуберанец может длительное время висеть над поверхностью Солнца. Мензел [5] дал решение магнитогидродинамического уравнения

$$0 = -\text{grad } p + \rho \mathbf{g} + \mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}], \quad (2.1)$$

применимого в этом случае. Он рассмотрел двумерную задачу, в которой переменные не зависят от x (ось z по-прежнему направлена по вертикали). Состав среды и ее температура считаются всюду одинаковыми, так что величина $\rho g/p$ постоянна. Для разделения переменных Мензел полагает

$$\mathbf{H} = \left(0, f e^{-z/\lambda}, \lambda \frac{df}{dy} e^{-z/\lambda} \right), \quad (2.2)$$

$$p = \psi e^{-2z/\lambda},$$

где λ — постоянная, а f и ψ зависят только от y . Предполагается, что при пересечении с плоскостью $y = 0$ силовые линии горизонтальны ($df/dy = 0$), а функции f и ψ принимают значения f_0 и ψ_0 . Выражение (2.2) всегда удовлетворяет условию $\text{div } \mathbf{H} = 0$. С помощью соотношения $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$ можно показать, что выражения (2.2) удовлетворяют уравнению (2.1), если

$$\dot{f} = f_0 \varphi,$$

$$\psi = \psi_0 \varphi^{-2q}. \quad (2.3)$$

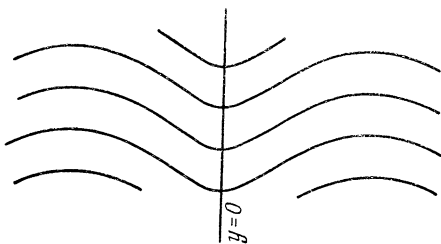
Здесь φ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 = 1 - \varphi^2 + r(1 - \varphi^{-2q}), \quad (2.4)$$

и $q = (\rho g \lambda / 2p) - 1$, $r = 8\pi \psi_0 / \mu f_0^2$. Таким образом, величина r представляет собой отношение давления газа к магнитному давлению при $y = 0$.

Уравнение (2.4) приходится решать численно. Однако основные свойства решения можно выяснить, не решая

уравнения. Нетрудно показать, что силовые линии определяются равенством $f(z) = e^{(z-z_0)/\lambda}$, где z_0 имеет различную величину для разных силовых линий; таким образом, одна силовая линия получается из любой другой смещением по вертикали. При $rq > 1$ функция φ имеет минимум при $y = 0$. Согласно соотношениям (2.2), это означает, что при



Ф и г. 5. Форма силовых линий, «поддерживающих» протуберанец (по теории Мензела).

$y = 0$ силовые линии образуют впадину, а давление максимально (на заданной высоте). Таким образом, можно считать, что силовые линии прогибаются вниз под воздействием локального избытка вещества. Распределение силовых линий показано на фиг. 5 для $q = 1/2$, $r = 6$.

Решение Мензела может служить в лучшем случае лишь самой грубой моделью неподвижно висящего протуберанца. Выражения (2.2), поскольку они зависят от z , не могут описывать более или менее изолированной массы, подвешенной в окружающей среде. Кроме того, решение φ уравнения (2.4) является периодическим по y , откуда следует, что силовые линии имеют волнообразную форму и области большой и малой плотностей последовательно чередуются. Очевидно, все эти свойства обусловлены принятыми допущениями, обеспечившими разделение переменных. Во всяком случае, следует считать установленным, что иногда силовые линии могут образовывать углубление, где вещество протуберанца удерживается благодаря магнитному давлению, причем такая система будет находиться в состоянии стабильного равновесия.

Теория токовых шнуров. В теории токовых шнуров предполагается, что нити в солнечной атмосфере представляют

собой траектории местных электрических токов, подобные ярким полосам, наблюдаемым в разрядной трубке. При первоначальном рассмотрении влияния таких токов мы пренебрегаем силой тяжести. Пусть плотность тока j всюду параллельна оси Oz и зависит лишь от расстояния R от этой оси. Тогда магнитные силовые линии представляют собой окружности с центрами на Oz и

$$4\pi Rj = \frac{d}{dR} (RH).$$

Механическая сила $\mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$ направлена внутрь в сторону оси Oz ; уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{dp}{dR} + \frac{\mu H}{4\pi R} \frac{d}{dR} (RH) = 0. \quad (2.5)$$

Если, например, плотность j постоянна и равна J внутри цилиндра $R = a$ и нулю вне цилиндра, то $H = 2\pi R J$ внутри цилиндра $R = a$. Отсюда $dp/dR = -2\pi\mu R J^2$ внутри цилиндра $R = a$. Вне цилиндра механические силы не действуют, так как $\mathbf{j} = 0$. Отсюда следует, что давление при $R > a$ есть постоянная величина Π , а при $R < a$

$$p = \Pi + \pi\mu J^2 (a^2 - R^2). \quad (2.6)$$

Повышение давления газа обычно связано с повышением плотности. Таким образом, из формулы (2.6) следует, что при прохождении электрического тока столб газа, по которому течет ток, стремится сжаться. Это обусловлено натяжением вдоль силовых линий и увеличением бокового магнитного давления с увеличением радиуса от 0 до a . Соответствующее явление в газовых разрядах хорошо известно; оно носит название пинч-эффекта. Однако увеличение плотности происходит не всегда; в некоторых случаях возрастание давления может быть обусловлено повышением температуры при протекании электрического тока.

Можно также указать поля, вызывающие уменьшение плотности. Уравнение (2.5) можно записать в виде

$$\frac{d}{dR} \left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi} \right) = - \frac{\mu H^2}{4\pi R}. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что если H равно нулю вне области $b < R < a$ и постоянно в этой области, то p уменьшается скачком на $\mu H^2/8\pi$ при переходе внутрь цилиндра $R = a$; при дальнейшем уменьшении R до b давление p постепенно возрастает, а при $R = b$ увеличивается скачком на $\mu H^2/8\pi$. Однако для существования такого поля нужно, чтобы на поверхностях $R = a$ и $R = b$ текли поверхностные токи противоположного направления; такую систему токов трудно осуществить.

Данджи [3] пытался обобщить эти результаты, учитывая поле тяжести. Как и Мензел, он рассматривал атмосферу с однородным составом и постоянной температурой и искал двумерное решение уравнений, не зависящее от координаты x (ось Oz по-прежнему направлена по вертикали). Он нашел, что существует такая конфигурация силовых линий, при которой любое поле с этой конфигурацией описывает возможное магнитогиродинамическое состояние. В любой плоскости $x = \text{const}$ силовые линии определяются условием $F = \text{const}$, где

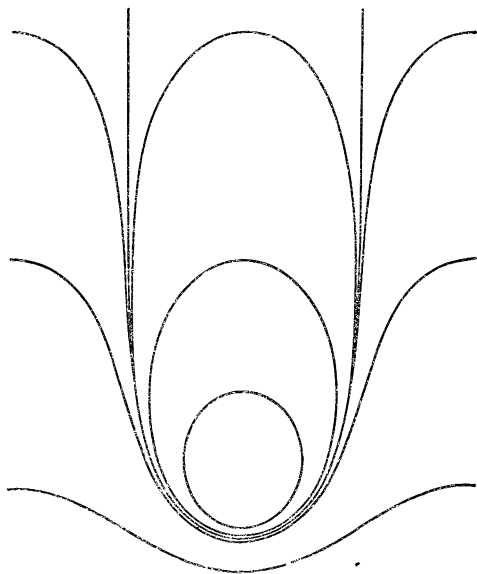
$$F^2 = e^{-\gamma z} + 2e^{-\frac{1}{2}\gamma z} \cos \frac{1}{2}\gamma y + 1. \quad (2.8)$$

Здесь γ имеет постоянное значение $\rho g/p$; начало координат выбрано в произвольной точке. Силовые линии представляют замкнутые кривые при $F < 1$ и бесконечные волнообразные кривые при $F > 1$; они показаны на фиг. 6. Давление газа и магнитное давление $\mu H^2/8\pi$ описываются функцией от F , умноженной на $e^{-\gamma z}$; они связаны уравнением

$$\frac{d}{dF} \left[e^{\gamma z} \left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi} \right) \right] = - \frac{\mu H^2}{4\pi F} e^{\gamma z}. \quad (2.9)$$

Данджи рассмотрел поле, равное нулю вне области, ограниченной замкнутыми линиями $F = a$ и $F = b$; в этом случае магнитное поле не влияет на давление вне наружной петли $F = a$. На границе $F = a$ происходит скачкообразное падение давления; на границе $F = b$ оно скачком повышается, достигая значения, превосходящего давление вне петли $F = a$ на том же уровне. Таким образом, хотя

в целом вещество внутри петли $F = a$ должно удовлетворять закону Архимеда, под действием поля оно может так распределиться внутри петли $F = a$, что тонкий горизонтальный токовый шнур будет находиться в равновесии со средой значительно меньшей плотности. Однако решение



Ф и г. 6. Форма силовых линий (по теории Данджи).

Данджи, так же как и более простое решение, найденное из уравнения (2.7), предполагает наличие противоположно направленных поверхностных токов на границах $F = a$ и $F = b$, что физически мало правдоподобно.

Недостатком других теорий токовых шнуров является то обстоятельство, что, согласно этим теориям, плотность нити должна быть больше плотности окружающей среды вследствие пинч-эффекта; таким образом, нить должна падать под действием силы тяжести. Кроме того, в любом варианте теории токовых шнуров требуется еще объяснить, почему токи текут по шнурам, а не по окружающему веществу. Сначала полагали, что протуберанцы подобны

электрическим разрядам, вызванным электрическим полем, возникающим при пересечении веществом магнитных силовых линий. Однако это электрическое поле слишком мало, так как сильного движения вещества поперек магнитных силовых линий не может быть. Хотя протуберанец и выглядит иногда как электрический разряд, он представляет собой холодный газ при $5000\text{--}10\,000^\circ\text{K}$, окруженный горячей короной с температурой в $1\,000\,000^\circ\text{K}$. Если бы в протуберанце происходил электрический разряд, его температура была бы значительно выше.

Третье возражение против теории токовых шнуров заключается в том, что она не может объяснить, почему эти шнуры должны удерживаться рядом. В теории магнитной дуги силовые линии обеспечивают жесткость, необходимую для удержания нитей вместе; это справедливо и в том случае, когда волокна представляют собой не стационарные образования, а траектории движущегося вещества (как это часто имеет место). Токовые шнуры не обладают такой жесткостью и вполне могут распасться на отдельные элементарные токи. В действительности есть основание полагать, что токовые шнуры механически неустойчивы. По этим причинам теория магнитной дуги представляется более удовлетворительной.

§ 4. Магнитогидростатическая устойчивость

Устойчивость магнитогидростатических состояний исследовалась Лундквистом [4]. Он не учитывал силы тяжести и сжимаемости жидкости. Поэтому единственным видом потенциальной энергии, которой может обладать система, является магнитная энергия, определяемая объемным интегралом

$$W_H = \int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\tau.$$

Из формулы (1.17) следует, что заданному малому смещению ξ вещества (являющемуся функцией точки) соответствует изменение поля $\Delta \mathbf{H}$ (в фиксированной материальной точке), разное в первом приближении

$$\Delta \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \xi. \quad (2.10)$$

Исходя из этого соотношения, Лундквист после подробного анализа нашел, что отклонение ξ от равновесного состояния меняет W_H на величину второго порядка

$$\Delta W_H = \frac{1}{8\pi} \int \{ \mu |(\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \xi|^2 + \psi \text{div} [(\xi \cdot \text{grad}) \xi] \} d\tau, \quad (2.11)$$

где $\psi = 4\pi p + \mu H^2/2$, а p и H относятся к равновесному состоянию.

Лундквист рассматривал равновесное поле, обладающее цилиндрической симметрией относительно оси Oz . Оно имеет составляющую H_z , параллельную оси Oz , и составляющую H_φ , направленную по касательной к окружности с центром на оси Oz , причем обе составляющие зависят лишь от расстояния r от оси и равны нулю вне цилиндра $r = R$. Составляющие смещения по осям приняты равными $abc \cos ax \sin bz$, 0 , $-a \sin ax \cos bz$, причем aR мало; это соответствует изгибу цилиндра $r = R$ по синусоиде. При этом оказывается, что $\Delta W_H < 0$, т. е. равновесие неустойчиво, если

$$\int_0^R H_\varphi^2 r dr > 2 \int_0^R H_z^2 r dr. \quad (2.12)$$

Можно, например, считать, что поле H_φ возникает в результате скручивания вокруг оси Oz первоначально однородного поля H_z внутри цилиндра $r = R$; при этом $H_\varphi = kH_z r/R$. Неустойчивость будет иметь место при $k > 2$. Чисто азимутальное поле ($H_z = 0$) всегда неустойчиво. Это заставляет считать токовые шнуры неустойчивыми.

Чтобы поле H_φ обращалось в нуль вне цилиндра $r = R$, токи у поверхности цилиндра и в глубине его должны течь в противоположные стороны. Можно было бы подумать, что неустойчивость связана с этим обстоятельством. Однако я рассмотрел азимутальное поле, создаваемое током постоянной плотности j_z внутри цилиндра $r = R$, и его искажение при смещении с составляющими $aa \exp(-\kappa r^2) \cos az$, 0 , $-2a\kappa x \exp(-\kappa r^2) \sin az$. Такая система тоже оказалась неустойчивой. Неустойчивость не связана также с предположением о несжимаемости жидкости; для сжи-

маемой жидкости достаточно установить неустойчивость по отношению к какому-либо одному виду смещения, в частности к такому, при котором плотность не меняется. Можно ожидать, что сила тяготения скорее увеличит, а не уменьшит вероятность неустойчивости. Таким образом, можно сделать вывод, что токовые шнуры, если их даже и можно создать, начнут деформироваться вследствие неустойчивости. Этот вывод согласуется с данными лабораторных исследований в разрядных трубках, в которых траектория разряда извивается вследствие неустойчивости.

§ 5. Спиральные ветви галактик

Среди теорий, объясняющих волокнообразную форму образований в межзвездном пространстве наличием магнитного поля, теория Чандрасекара и Ферми [2] характеризуется наиболее широкой постановкой задачи. В ней предполагается, что в спиральных ветвях галактик имеется магнитное поле, направленное вдоль ветвей. Согласно этой теории, спиральные ветви находятся в таком же отношении к остальной галактике, как дуговые протуберанцы к Солнцу.

Целый ряд косвенных соображений, основанных на анализе полной энергии космического излучения и данных о поляризации света звезд при рассеянии на межзвездном веществе, заставляет предположить, что в межзвездном пространстве нашей Галактики существует магнитное поле. Интерпретация данных о поляризации, являющаяся довольно надежной, указывает на то, что магнитные силовые линии почти параллельны плоскости Галактики. Данные радиоастрономии и некоторые другие показывают, что наше Солнце находится у края спиральной ветви Галактики. Это привело Чандрасекара и Ферми к предположению, что магнитное поле, влияющее на поляризацию, направлено вдоль ветви спирали. Они оценили величину этого поля двумя способами.

Во-первых, магнитное поле заморожено в межзвездный газ и перемещается вместе с ним при случайных перемещениях газа, однако оно никогда не отклоняется далеко от плоскости Галактики. Если это объясняется тем, что движение определяется в основном магнитными силами, то параметр $S = \mu \bar{H}^2 / 4\pi \rho V^2$ [формула (1.26)] должен быть

велик. Здесь ρ — плотность, а V — средняя скорость случайного движения межзвездного газа. Полагая $\rho = 2 \cdot 10^{-24}$ г/см³ и $V = 5$ км/сек, мы получаем, что \bar{H} должно быть много больше $2,5 \cdot 10^{-6}$ эрстед, чтобы S было велико. Если уточнить эти рассуждения, учтя величину отклонения магнитного поля от плоскости Галактики, то для \bar{H} получится значение $7,2 \cdot 10^{-6}$ эрстед.

Вторая оценка \bar{H} получается из магнитогидростатических соображений. Гравитационное притяжение звезд и газа в спиральной ветви стремится сжать ветвь в тонкую нить. Согласно оценке Чандрасекара и Ферми, давление газа и турбулентность слишком слабы, чтобы воспрепятствовать этому сжатию. Поэтому указанные авторы приняли, что сжатию спиральной ветви препятствует боковое магнитное давление. Если M — приходящаяся на единицу длины масса в спиральной ветви, а R — радиус сечения ветви, то плотность гравитационной силы, действующей на газ плотности ρ , имеет величину порядка $GM\rho/R$. Для уравнивания этой силы необходимо давление порядка $GM\rho$. Если принять, что большая часть этого давления обусловлена магнитным полем, то для него получается значение $6 \cdot 10^{-6}$ эрстед. Поле такой величины не только препятствует поперечному сжатию спиральной ветви; оно также замедляет продольное гравитационное сжатие до такой степени, при которой сжатие становится несущественным.

Обе оценки величины магнитного поля \bar{H} согласуются по порядку величины. Тем не менее эта теория не получила всеобщего признания: разрешая одни вопросы, она выдвигает столько же других. Откуда, например, берется магнитное поле в спиральной ветви? Поле в столбе протуберанца может быть создано солнечным пятном; в спиральной ветви не существует такого источника поля. Далее, в спиральную ветвь входят как звезды, так и межзвездное вещество. Поскольку магнитное поле фактически неспособно воздействовать на движение звезд, то какова их роль в теории? Как сказывается неодинаковая скорость вращения различных частей Галактики? Не следует ли при оценке отклонений магнитного поля от плоскости Галактики учитывать гравитационное притяжение к этой плоскости? Все эти, а также другие неупомянутые трудности заставляют

смотреть на эту теорию лишь как на стимулирующее предположение. Магнитная теория межзвездных волокнообразных образований еще не сказала своего последнего слова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfvén H., Ark. Mat. Astr. Fys., **29A**, No. 11 (1943).
2. Chandrasekhar S., Fermi E., Astrophys. Journ., **118**, 113 (1953). (Имеется перевод: ПСФ, вып. 2, ИЛ, 1954.)
3. Dungey J. W., Month. Not. Roy. Astr. Soc., **113**, 180 (1953).
4. Lundquist S., Phys. Rev., **83**, 307 (1951).
5. Menzel D. H., Report of Conference on the Dynamics of Ionized Media, London, 1951.

ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 1. Магнитогидродинамические волны

Как отмечалось в § 3 гл. 1 [см. уравнение (1.20)], механическое действие магнитного поля эквивалентно сумме гидростатического давления $\mu H^2/8\pi$ и натяжения $\mu H^2/4\pi$ вдоль силовых линий. В несжимаемой жидкости гидростатическое давление может уравниваться давлением жидкости, так что действует лишь натяжение $\mu H^2/4\pi$. По аналогии с теорией колебаний натянутых струн мы можем ожидать, что при таком натяжении возможны поперечные волны вдоль силовых линий, распространяющиеся со скоростью a , определяемой соотношением

$$a^2 = \frac{\mu H^2}{4\pi\rho}. \quad (3.1)$$

Возможность существования таких волн была впервые установлена Альфвеном [1] в 1942 г. Здесь мы приведем рассмотрение Валена [9]. Рассмотрим бесконечную однородную жидкость, пронизываемую однородным полем \mathbf{H}_0 . Пусть вследствие малого возмущения в некотором объеме жидкости возникло поле скоростей \mathbf{v} , а магнитное поле стало равно $\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$. Если пренебречь диссипативными эффектами (т. е. считать, что проводимость бесконечно велика, а вязкость равна нулю), то уравнения, определяющие изменение \mathbf{h} и \mathbf{v} , примут вид:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})], \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \mathbf{g} + \frac{\mu}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{h} \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h})]. \quad (3.3)$$

Здесь мы пренебрежем квадратами и произведениями малых величин \mathbf{h} и \mathbf{v} . Далее, поскольку поле \mathbf{H}_0 однородно, а $\operatorname{div} \mathbf{h} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, то уравнения запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = (\mathbf{H}_0 \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}, \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \left(p + \frac{\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h}}{4\pi} + \rho \psi \right) + \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H}_0 \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{h}, \quad (3.5)$$

где ψ — гравитационный потенциал ($\mathbf{g} = -\operatorname{grad} \psi$). Беря дивергенцию от последнего равенства, получаем

$$\nabla^2 \left(p + \frac{\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h}}{4\pi} + \rho \psi \right) = 0.$$

Вне области возмущения $\mathbf{h} = 0$ и, согласно условию равновесия, $\operatorname{grad} (p + \rho \psi) = 0$. Таким образом, величина $p + \rho \psi + (\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h}/4\pi)$ является решением уравнения Лапласа, постоянным вне некоторой области; отсюда следует, что оно постоянно всюду. Следовательно, уравнение (3.5) принимает вид

$$4\pi\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mu (\mathbf{H}_0 \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{h}. \quad (3.6)$$

Примем для простоты, что ось Oz параллельна \mathbf{H}_0 . Тогда (3.4) и (3.6) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= H_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \\ 4\pi\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mu H_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$a \equiv H_0 \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}$$

есть скорость распространения волн, совпадающая со значением, определяемым полученным выше из общих сообра-

жений выражением (3.1). Таким образом, возмущение можно представить как совокупность двух волн, бегущих со скоростями $\pm a$ вдоль силовых линий. Эти волны называются магнитогидродинамическими.

В лабораторных опытах с ртутью при поле напряженностью 1000 эрстед скорость a равна 75 см/сек. Для ядра Земли, в котором поле существенно меньше, a имеет величину порядка лишь нескольких сантиметров в 1 сек. В солнечной атмосфере a может быть значительно больше вследствие малой плотности атмосферы. Принимая для плотности слоев фотосферы Солнца значение $\rho = 2 \cdot 10^{-7}$, получаем $a = 6 \cdot 10^5$ см/сек при поле величиной порядка 1000 эрстед. Указанная скорость близка к скорости звука в этой среде.

§ 2. Исследование магнитогидродинамических волн

Безразмерный параметр S , определяемый формулой (1.26), выражается через скорость a волн следующим образом:

$$S = \frac{a^2}{V^2}. \quad (3.9)$$

Следовательно, величина $S^{-1/2}$ аналогична числу Маха в аэродинамике. Если эта величина мала (т. е. если S велико), то скорость движения среды мала по сравнению со скоростью распространения магнитогидродинамических волн и возмущение распространяется в виде таких волн, не вызывая существенного изменения поля. Если же величина $S^{-1/2}$ велика (т. е. если S мало), то процесс аналогичен сверхзвуковому движению в аэродинамике: искажения поля, создаваемые возмущением, возникают слишком быстро, чтобы исчезнуть за счет магнитогидродинамических волн. Только при больших значениях S удобно описывать движение с помощью магнитогидродинамических волн.

Если движение можно описать как волну, движущуюся в сторону положительных z , то $(\partial \mathbf{h} / \partial t) + a (\partial \mathbf{h} / \partial z) = 0$, так что [см. уравнения (3.7)]

$$\mathbf{h} = -H_0 \frac{\mathbf{v}}{a} = - \sqrt{\frac{4\pi\rho}{\mu}} \mathbf{v}. \quad (3.10)$$

Аналогично, для волн, движущихся в сторону отрицательных z ,

$$\mathbf{h} = H_0 \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{4\pi\rho}{\mu}} \mathbf{v}.$$

В обоих случаях магнитная энергия возмущающего поля в единице объема $\mu h^2/8\pi$ равна кинетической энергии $\rho v^2/2$ в том же объеме. Однако это не означает, что в целом энергия распределена поровну между магнитной и кинетической. При больших S (нормальный случай) энергия невозмущенного магнитного поля $\mu H_0^2/8\pi$ значительно больше энергии возмущения; кроме того, следует учитывать энергию $\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h}/4\pi$ взаимодействия первоначального поля с возмущением, которая имеет промежуточную величину.

Однако магнитогидродинамические волны возможны и при S порядка единицы. Пусть справедливо соотношение (3.10); тогда член $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]$ в уравнении (3.2) обращается в нуль. Далее, в уравнении (3.3)

$$\frac{\mu}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}] = \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{h} \cdot \text{grad}) \mathbf{h} - \text{grad} \left(\frac{\mu h^2}{8\pi} \right).$$

Член $(\mu/4\pi) (\mathbf{h} \cdot \text{grad}) \mathbf{h}$ компенсируется слагаемым $\rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$, которое можно выделить в левой части уравнения (3.3); член $-\text{grad} (\mu h^2/8\pi)$ может быть скомпенсирован уменьшением давления на $\mu h^2/8\pi$. Таким образом, величина $p + \rho \psi + \mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h}/4\pi + \mu h^2/8\pi$ будет постоянна. В этом случае уравнения (3.2) и (3.3) без каких-либо пренебрежений точно сводятся к уравнению (3.7). Это означает, что если возмущение представляет собой волну, бегущую в сторону положительных z , то \mathbf{h} и \mathbf{v} не обязательно должны быть малыми величинами с пренебрежимо малыми квадратами и произведениями. Следовательно, могут существовать волны, в которых \mathbf{h} велико по сравнению с невозмущенным полем; для таких волн магнитная и кинетическая энергии приблизительно равны друг другу. Однако следует подчеркнуть, что такие волны представляют собой исключительный случай, по-видимому трудно реализуемый практически. Обычно начальное возмущение состоит из волн, распространяющихся как в сторону положительных, так и в сторону отрицательных z , и наличие нелинейных членов

в уравнениях (3.2) и (3.3) затрудняет разделение этих волн, если \mathbf{v} и \mathbf{h} не малы.

Плоская магнитогидродинамическая волна получается в предположении, что \mathbf{v} и \mathbf{h} пропорциональны периодическому множителю $\cos \omega [t \pm (z/a) + lx + my]$. Фазовая скорость волн в направлении, перпендикулярном волновому фронту, равна $(a^{-2} + l^2 + m^2)^{-1/2}$, т. е. меньше a . Но это не имеет значения: групповая скорость равна a и направлена параллельно Oz . Энергия волны распространяется с групповой скоростью, а не по нормали к волновому фронту.

1. Диссипативные эффекты. В простой теории, изложенной в § 1 настоящей главы, мы пренебрегали диссипативными эффектами. Учет электрического сопротивления и вязкости приводит соответственно к появлению членов $\eta \nabla^2 \mathbf{h}$ и $\rho \nu \nabla^2 \mathbf{v}$ в правых частях уравнений (3.7), где $\eta = (4\pi\sigma\mu)^{-1}$. Таким образом, влияние конечной электропроводности сильнее влияния вязкости при $\eta \gg \nu$. Обычно указанное условие выполняется; исключение представляет чрезвычайно разреженное вещество межзвездного пространства. Так, для ртути в лабораторных условиях величина $\eta/\nu = 6 \cdot 10^6$; для вещества Солнца $\eta/\nu \sim 10^3$. Поэтому в дальнейшем мы будем учитывать лишь влияние электрического сопротивления.

При учете электрического сопротивления первое из уравнений (3.8) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial z^2} + \eta \nabla^2 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}; \quad (3.11)$$

аналогичное уравнение справедливо и для \mathbf{v} . В отличие от (3.8) в уравнение (3.11) входит не только координата z , но и x и y . Следовательно, теперь волны с различными волновыми фронтами уже не распространяются с одной и той же скоростью в направлении оси z . Движение можно представить как сумму волн, бегущих со скоростями $\pm a$ вдоль оси z , с возмущениями, диффундирующими по мере распространения волн. Время, в течение которого возмущение заметно изменится за счет диффузии, сравнимо с рассмотренным в § 3 гл. I временем исчезновения поля в покоем веществе. Поэтому влияние диффузии несущественно

в большинстве космических проблем. В лабораторных же экспериментах оно играет существенную роль.

2. Сжимаемость. В § 1 настоящей главы предполагалось также, что жидкость однородна и несжимаема, вследствие чего развитая там теория, строго говоря, неприменима к проводящим газам. Однако известно, что сжимаемость не оказывает заметного влияния на динамику газа, если скорости движения малы по сравнению со скоростью распространения звука C . Поэтому можно ожидать, что в газе магнитогидродинамические волны распространяются приблизительно так же, как и в жидкости, если только их скорость много меньше C .

Этот вывод подтверждается и более детальным рассмотрением. Возьмем, например, плоскую волну, в которой составляющие поля и скорости содержат периодический множитель $\cos \omega (t - lx - nz)$; как и раньше, полагаем, что ось z параллельна магнитному полю \mathbf{H}_0 . Если движение параллельно оси Oy (перпендикулярно \mathbf{H}_0), то плотность не меняется и теория § 1 полностью применима. Если же движение перпендикулярно оси Oy , то l и n оказываются связанными с a уравнением

$$C^2 (l^2 + n^2) (1 - a^2 n^2) = 1. \quad (3.12)$$

Если отношение a/C мало, то мы находим либо

$$a^2 n^2 = 1, \quad n = \pm \frac{1}{a},$$

что, как и раньше, соответствует магнитогидродинамическим волнам, либо

$$C^2 (l^2 + n^2) = 1,$$

что соответствует обычным звуковым волнам. Если же отношение a/C не мало, то сжимаемость играет существенную роль; возможные значения n сильно отличаются от $\pm 1/a$ и зависят от направления нормали к волновому фронту. Следовательно, уже нельзя ожидать, что возмущение будет распространяться как целое вдоль силовых линий; такая картина будет наблюдаться лишь в том случае, когда движение всюду перпендикулярно \mathbf{H}_0 .

Полученный результат применяется в первую очередь при рассмотрении волн в поверхностных слоях солнечного пятна, где величина a может быть сравнима со скоростью C или больше нее. Из сказанного следует, что магнитогиродинамическая волна может проникнуть сквозь поверхностные слои только тогда, когда движение в ней перпендикулярно \mathbf{H}_0 ; в остальных же случаях она приводит к возмущениям плотности типа звуковых волн.

3. Неоднородность. Остается рассмотреть, какие видоизменения нужно внести в теорию, когда плотность ρ и невозмущенное поле \mathbf{H}_0 неоднородны. Если влиянием силы тяжести можно пренебречь, а ρ и \mathbf{H}_0 меняются от точки к точке сравнительно медленно, то неоднородность сказывается просто в том, что различные участки бегущей волны распространяются вдоль отдельных силовых линий с локальной скоростью $a = H_0 \sqrt{\mu/4\pi\rho}$. Фронт любого малого возмущения достигает какой-либо точки на некоторое фиксированное время t раньше, чем «хвост» возмущения; таким образом, протяженность возмущения вдоль силовой линии равна at . Сечение возмущения, перпендикулярное силовой линии, меняется так, что магнитный поток $H_0 S$ через S остается постоянным. Полная энергия возмущения также остается постоянной; она пропорциональна $\rho v^2 S a t$. Таким образом, величина $\rho v^2 a / H_0$ постоянна, т. е. $v \sim \rho^{-1/4}$. Поскольку $\mathbf{v} = \pm a \mathbf{h} / H_0$, то это означает, что $h \sim \rho^{1/4}$. Приведенные результаты были впервые получены Валеном [9].

Если учесть влияние силы тяжести, то теория изменится гораздо более существенно. Рассмотрим, например, жидкость, плотность которой возрастает по мере увеличения глубины Z . Если скорость v образует с горизонталью средний угол α , то благодаря возмущению вещество переносится на высоту $vt \sin \alpha$ вверх или вниз от начальной точки. Поскольку плотности в возмущенном объеме и в окружающем пространстве различны, во время перемещения на объем действует нескомпенсированная сила тяжести с объемной плотностью $\frac{1}{2} (vt \sin \alpha) g \partial \rho / \partial Z$. Сила тяжести совершает работу $\frac{1}{2} (vt \sin \alpha)^2 g \partial \rho / \partial Z$ (на единицу объема). Поскольку работа совершается за время t , скорость уменьшения плотности энергии возмущения равна $\frac{1}{2} (v^2 t \sin^2 \alpha) g \partial \rho / \partial Z$. Это уменьшение обусловлено той частью энергии, которая

связана с вертикальным движением, т. е. кинетической энергией с плотностью $\frac{1}{2} \rho v^2 \sin^2 \alpha$ и равной ей магнитной энергией (обусловленной вертикальной составляющей поля возмущения \mathbf{h}). Таким образом, энергия вертикального движения исчезает за время порядка t' , где t' определяется соотношением

$$\frac{\rho v^2 \sin^2 \alpha}{t'} = \frac{1}{2} v^2 t \sin^2 \alpha g \frac{\partial \rho}{\partial Z},$$

т. е.

$$\frac{1}{t'} = \frac{gt}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial Z}. \quad (3.13)$$

Если производная $\partial \rho / \partial Z$ велика, то вертикальная составляющая движения быстро затухает. Итак, для магнитогиродинамических волн в неоднородной жидкости характерно горизонтальное движение; из условия непрерывности следует, что оно должно быть циркуляционным.

Эту теорию можно применить и к газовой атмосфере, если только заменить $\partial \rho / \partial Z$ на $\partial' \rho / \partial Z$, т. е. на разность между истинным градиентом плотности и значением градиента, соответствующим атмосфере, находящейся в конвекционном равновесии. В устойчивой атмосфере $\partial' \rho / \partial Z$ составляет заметную часть от полного градиента плотности. Так, например, для Солнца на расстоянии от центра, равном половине радиуса, значения $\rho (\partial' \rho / \partial Z)^{-1}$ и g можно считать равными соответственно $2 \cdot 10^{10}$ см и 10^5 см/сек², что дает $tt' = 4 \cdot 10^5$ сек². Следовательно, возмущение, проходящее какую-либо фиксированную точку, скажем, за сутки, не может обладать заметным вертикальным движением.

С помощью аналогичных рассуждений Альфвен показал, что в неустойчивой атмосфере, в которой градиент плотности больше его адиабатического значения, вертикальное движение в магнитогиродинамической волне должно быстро нарастать. Однако в неустойчивой атмосфере возникает спонтанная конвекция, охватывающая все пространство. В этом случае мы имеем дело не с более или менее регулярным движением, определяемым магнитным полем, а с нерегулярным движением, закручивающим силовые линии самым причудливым образом и создающим, по образному выражению Валена, «неразбериху магнитных полей». Можно

ожидать, что при этом магнитное поле как-то влияет на движение, однако едва ли такое движение можно рассматривать как магнитогидродинамические волны.

§ 3. Экспериментальные данные

Лундквист [7] исследовал экспериментально магнитогидродинамические волны в ртути. Ртуть, налитая в цилиндрический сосуд из нержавеющей стали, помещалась в вертикальное магнитное поле напряженностью до 13 000 эрстед. Волны возбуждались с помощью горизонтального диска с радиальными ребрами, находящегося на дне сосуда с ртутью. Диск совершал малые крутильные колебания вокруг вертикальной оси. Образующиеся волны не являются, строго говоря, стоячими вследствие конечной проводимости ртути; лучше всего считать, что от диска движется вверх возбуждаемая им бегущая волна, испытывающая затем последовательные отражения от свободной поверхности ртути и от диска и затухающая по мере распространения. Таким образом, колебания на свободной поверхности ртути меньше по амплитуде и отстают по фазе по сравнению с колебаниями у диска.

Поле \mathbf{h} удовлетворяет уравнению (3.11), поскольку оно направлено по азимуту; величина поля h удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) + a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \quad (3.14)$$

где z — высота над поверхностью диска, а r — расстояние от его оси. Скорость v связана с h уравнением

$$e \frac{\partial v}{\partial t} = \mu H_0 \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (3.15)$$

В качестве граничных условий потребуем, чтобы h обращалось в нуль на боковой поверхности сосуда ($r = R$) и на свободной поверхности ртути ($z = Z$); на поверхности диска ($z = 0$) можно положить

$$v = \frac{rv_0}{R} e^{i\omega t}. \quad (3.16)$$

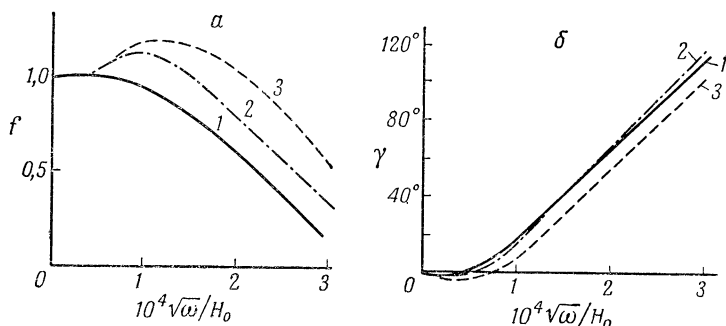
Соответствующее этим условиям значение v определяется выражением

$$v = \frac{v_0}{R} e^{i\omega t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2 J_1(k_r r)}{k_r J_2(k_r R)} \frac{\cos \alpha_v (Z - z)}{\cos \alpha_v Z}, \quad (3.17)$$

где k_r — корни уравнения $J_1(k_r R) = 0$, а

$$\alpha_v^2 = \frac{\omega^2 - i\omega\eta k_v^2}{a^2 + i\omega\eta}. \quad (3.18)$$

Фактически для сопоставления с экспериментом использовалось выражение, несколько отличающееся от (3.17); оно



Ф и г. 7. Сопоставление экспериментально полученных Лундквистом кривых зависимости f (случай a) и γ (случай b) от $\sqrt{\omega}/H_0$ для магнитогидродинамических волн в ртути.

Через f обозначено отношение амплитуд колебаний на поверхности и на дне; через γ — разность фаз этих колебаний.

1 — экспериментальные данные; 2 — теоретическая кривая, рассчитанная Ленертом, который принимал, что ртуть между ребрами жестко связана с вибрирующей пластинкой; 3 — теоретическая кривая, рассчитанная Лундквистом.

учитывало то обстоятельство, что в действительности при $z = 0$ скорость падает до нуля вблизи $r = R$.

На фиг. 7 экспериментальные данные сопоставлены с теоретическими. Качественно они согласуются хорошо; количественное совпадение менее удовлетворительно. Количественное расхождение частично можно объяснить нерегулярностью движения вблизи ребер на вибрирующем диске, частично неточностью граничных условий (так, например, в диске текут электрические токи) и пренебрежением в

уравнении членами второго порядка. Кроме того, свободная поверхность ртути быстро загрязняется, что может влиять на отражение волны от нее. Наконец, у краев вибрирующего диска течение может быть неламинарным.

Ртуть не является наиболее подходящей жидкостью для магнитогидродинамических исследований, так как плотность ее велика, а проводимость сравнительно мала. Недавно Ленерт [6] повторил опыты Лундквиста (с некоторыми изменениями) на жидком натрии. Жидкий натрий тоже не является идеальным веществом для таких опытов; во всяком случае, жидкость нельзя считать идеальной, если экспериментатор вынужден надевать асбестовый костюм, чтобы подойти к прибору. Все же благодаря меньшей плотности и большей проводимости жидкого натрия скорость магнитогидродинамических волн в нем больше, а затухание меньше, хотя все еще достаточно велико, чтобы исключить возможность какого-либо резонанса. В идеальной проводящей жидкости, для которой $\eta = 0$ и все a_n равны ω/a , резонанс должен наблюдаться при $2\omega Z = \pi a$. Однако при экспериментах был обнаружен лишь слабо заметный максимум амплитуды, слегка смещенный от резонанса в сторону более сильных магнитных полей.

Ленерт увеличил точность определения смещения на поверхности, измеряя разность потенциалов в движущейся жидкости между двумя зондами, в то время как Лундквист пользовался плавающим зеркалом и хронометром. Ленерт уточнил также теоретический расчет, учтя омические потери в вибрирующей пластине и возмущающее действие оси, с помощью которой в его опытах приводилась в движение пластина. В результате ему удалось добиться несколько лучшего согласия теории с экспериментом, но и у него экспериментальные данные все же существенно расходились с теорией.

Бостик и Левин [3] исследовали разреженный ионизованный газ в магнитном поле. Плотность газа в их опытах была столь мала, что скорость магнитогидродинамических волн имела величину, близкую к скорости звука, или превышала ее. Поэтому сжимаемость играла существенную роль. Собственно, именно путем наблюдения периодических изменений плотности было установлено наличие стоячих магнитогидродинамических волн. Газ находился в торо-

идальной трубке, причем магнитное поле, направленное вдоль трубки, препятствовало свободной диффузии ионов к стенкам. Однако, хотя наблюдавшиеся волны и напоминают магнитогидродинамические, в них явно играют роль и иные взаимодействия между электромагнитным полем и движением, помимо тех, которые учитываются в теории магнитогидродинамических волн. Стоячие магнитогидродинамические волны не могут обычно существовать без подвода энергии извне; в данном случае источником энергии являлось электромагнитное поле.

При больших плотностях, при которых скорость магнитогидродинамических волн была бы значительно меньше скорости звука, проводимость ионизованного газа в лабораторных условиях имеет слишком малую величину. Поэтому в лабораторных условиях нельзя осуществить эксперименты с такой средой (жидкой или газообразной), в которой могли бы распространяться почти чистые магнитогидродинамические волны с малым сжатием и малым поглощением. Можно ожидать некоторого улучшения условий эксперимента при увеличении линейных размеров приборов, что уменьшает потери. Но и в этом случае разрыв между тем, что может дать наилучший эксперимент в лабораторных условиях, и почти идеальными магнитогидродинамическими волнами, которые мы считаем возможными на Солнце и на звездах, еще очень велик. Экстраполяция от одних условий к другим почти невозможна, так что при исследовании космических явлений приходится обычно руководствоваться теоретическими данными и надеждой на то, что в теории не опущены какие-либо существенные черты явлений.

§ 4. Вращение звезд

Обычные магнитогидродинамические волны обусловлены жесткостью, которую магнитное поле придает веществу. Магнитная жесткость может вызывать также и колебательные движения в различных астрономических объектах.

В частности, магнитная жесткость сказывается на неоднородном вращении звезд. Неоднородность вращения Солнца, например, проявляется в том, что оно вращается вблизи экватора быстрее, чем вблизи полюсов: вблизи экватора период обращения равен 25 суткам, а на широте

35° он равен 27 суткам. Рассмотрим такую неоднородную вращающуюся звезду, обладающую магнитным полем. Можно считать, что магнитные силовые линии заморожены в вещество и увлекаются при вращении. Поэтому магнитное поле звезды может быть постоянным лишь в том случае, когда оно симметрично относительно оси вращения и каждая силовая линия лежит на поверхности, симметричной относительно оси и вращающейся с постоянной угловой скоростью. Это так называемый «закон изоротации» магнитного поля, открытый в 1937 г. Ферраро [5].

Легко дать простое аналитическое доказательство этого закона. Пренебрегая электрическим сопротивлением, можно написать

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}].$$

Поскольку $\text{div} \mathbf{v} = 0$ и $\text{div} \mathbf{H} = 0$, это уравнение сводится к следующему:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{H}. \quad (3.19)$$

Примем цилиндрическую систему координат R, φ, z , где z — расстояние от экваториальной плоскости, а R — расстояние от оси вращения. Пусть ω — местная угловая скорость, так что $v = R\omega$. Тогда, беря составляющие уравнения (3.19) по R, z и φ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_R}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial H_R}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = R \left(H_R \frac{\partial \omega}{\partial R} + H_z \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \omega \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Таким образом, если $\partial \mathbf{H} / \partial t = 0$, то из первых двух уравнений следует, что H_R и H_z не зависят от φ ; из условия $\text{div} \mathbf{H} = 0$ вытекает, что и $\partial H_\varphi / \partial \varphi$ не зависит от φ . Но H_φ — однозначная функция точки, откуда следует, что производная $\partial H_\varphi / \partial \varphi$ должна быть равна нулю, т. е. поле

симметрично относительно оси вращения. Из третьего уравнения следует, что $(\mathbf{H} \cdot \text{grad})\omega = 0$, т. е. угловая скорость вдоль силовой линии постоянна.

Из механических соображений ясно, что при стационарном вращении изоротационное поле должно лежать в меридиональных плоскостях, так как в противном случае азимутальная составляющая максвелловых натяжений не была бы уравновешена. Пусть теперь стационарное состояние вращения возмущено азимутальным смещением какой-то части звезды, симметричным относительно оси. Возникающее при этом искажение магнитного поля создает упругую силу, стремящуюся возратить смещенную массу назад. В результате возмущение будет распространяться вдоль магнитной силовой линии, что эквивалентно магнитогидродинамической волне кручения.

Пусть движение складывается из невозмущенного вращения с угловой скоростью ω_0 и небольшой добавки ω' , обусловленной возмущением. Аналогично, пусть магнитное поле \mathbf{H} складывается из невозмущенного магнитного поля \mathbf{H}_0 и (азимутального) поля возмущения \mathbf{h} . Тогда с точностью до первого порядка относительно малых величин \mathbf{h} и ω' из уравнений (3.20) получаем

$$\frac{\partial h_\varphi}{\partial t} = R(\mathbf{H}_0 \cdot \text{grad}) \omega'. \quad (3.21)$$

Единственной силой, входящей в φ -составляющую уравнения движения, является электромагнитная сила $\mu[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$. Исходя из этого, можно показать, что уравнение движения по φ принимает следующий вид:

$$4\pi\rho R^2 \frac{\partial \omega'}{\partial t} = \mu(\mathbf{H}_0 \cdot \text{grad}) R h_\varphi. \quad (3.22)$$

Уравнения (3.21) и (3.22) аналогичны уравнениям (3.4) и (3.6) из изложенной выше теории магнитогидродинамических волн.

Можно было бы ожидать, что уравнения (3.21) и (3.22) в сочетании с соответствующими граничными условиями определяют периоды свободных крутильных колебаний звезды. Но, как показали Пламpton и Ферраро, это не так.

Уравнения (3.21) и (3.22) содержат лишь изменения ω и Rh_p вдоль одной силовой линии. Из них следует, что движение отдельной силовой линии (или, точнее, поверхности вращения, образующей которой является эта силовая линия) совершенно не зависит от движения остального вещества. Период колебания такой поверхности вращения должен быть порядка времени прохождения магнитогидродинамических волн вдоль соответствующих силовых линий и, следовательно, различен для разных поверхностей. Поэтому вместо дискретного набора собственных периодов звезда оказывается обладающей непрерывным интервалом возможных периодов, причем каждый период характеризует колебание лишь бесконечно малой части массы.

Отсюда следует, что уравнения (3.21) и (3.22) дают слишком грубое приближение. В действительности вращательное движение и движение в меридиональных плоскостях не являются независимыми. Изменение угловой скорости скажется на центробежной силе и, следовательно, вызывает движение в меридиональной плоскости, которое в свою очередь благодаря кориолисовой силе действует на вращение. Это взаимодействие приводит к возникновению дискретного набора собственных частот.

Полученный результат имеет, по всей вероятности, лишь академическое значение. Более существенно, что периоды, определяемые уравнениями (3.21) и (3.22), весьма малы по сравнению с астрономическими масштабами времени. Если положить для Солнца $H_0 = 1$ эрстед и $\rho = 2$ г/см³ (порядка средней плотности), то скорость магнитогидродинамических волн будет равна 0,2 см/сек. Можно ожидать, что период колебаний будет иметь величину порядка времени прохождения магнитогидродинамической волной расстояния, равного радиусу Солнца. Это время составляет $3,5 \cdot 10^{11}$ сек, т. е. 10 000 лет. Таким образом, достаточно и значительно меньшего поля, чтобы изоротационное состояние установилось за время, значительно меньшее возраста солнечной системы ($3 \cdot 10^9$ лет).

Согласно первым измерениям общего магнитного поля Солнца (по эффекту Зеемана), величина поля составляет около 25 эрстед. Последующие измерения не подтвердили этого значения. Они показали, что поле не может превышать 1—2 эрстед. Последние данные указывают на то, что на

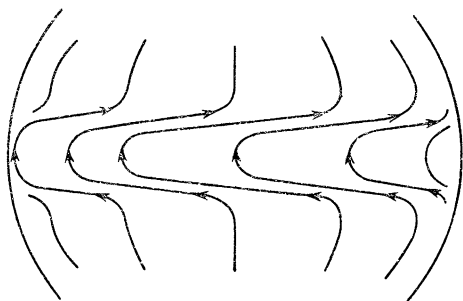
Солнце действительно имеется поле такого порядка, по крайней мере на больших широтах. Такое поле должно оказывать большое влияние на вращение Солнца, несмотря на то, что силы магнитного происхождения очень малы.

Объяснение солнечных пятен крутильными колебаниями.

Исследование крутильных колебаний в звездах было начато Валеном [10] в 1946 г. Он пытался объяснить ими магнитные поля солнечных пятен. Уравнения (3.21) и (3.22) справедливы и в том случае, когда возмущение магнитного поля h велико по сравнению с невозмущенным полем H_0 . В соответствии с этим Вален предположил, что в результате крутильных колебаний из малого поля H_0 в меридиональных плоскостях может образоваться сильное азимутальное поле h . Он принял, что в ядре Солнца магнитные силовые линии перепутаны благодаря имеющейся там конвекции. Это придает ядру жесткость, так что оно стремится вращаться, как твердое тело. Однако время от времени, согласно гипотезе Валена, происходит внезапная вспышка интенсивной конвекции в ядре; при этом вследствие сохранения момента количества движения угловая скорость на поверхности ядра уменьшается. В результате возникает крутильная магнитогидродинамическая волна, распространяющаяся вдоль силовых линий к поверхности Солнца. Вследствие перепутанности силовых линий в ядре возможно существование собственных периодов крутильных колебаний для Солнца в целом. Реальное движение, согласно Валену, является приблизительно периодическим и представляет собой затухающие крутильные колебания, вызываемые вспышками интенсивной конвекции в ядре, происходящими с интервалом приблизительно в 23 года.

Применение этих соображений к солнечным пятнам, лишь намеченное в работах Валена, может быть осуществлено следующим образом. Согласно остроумным соображениям Валена (см. § 6 гл. 5), общее поле под поверхностью Солнца значительно больше поля, наблюдаемого на поверхности; проникновению поля наружу препятствует конвекция в слоях, прилегающих к поверхности Солнца. Поэтому мы можем считать, что крутильная волна распространяется под самой поверхностью Солнца по направлению к экватору. На последнем участке ее пути силовые линии обра-

зуют тугой пучок, опоясывающий Солнце в обоих полушариях (фиг. 8). Если за счет местного возмущения какой-либо участок этого пучка выходит на поверхность Солнца, то на ней возникают две области с противоположной магнитной полярностью: в одной силовые линии выходят из поверхности Солнца, в другой возвращаются обратно. Можно полагать, что эти две области и образуют пару солнечных пятен противоположной полярности.



Ф и г. 8. Силовые линии вблизи поверхности Солнца в момент, когда крутильные волны приближаются к экватору.

В области переменной угловой скорости (умеренные широты) силовые линии близки друг к другу и почти параллельны экватору. Аналогичное возмущение силовых линий может быть вызвано любым непрерывным изменением угловой скорости (см. § 4 гл. 5).

Изложенная теория объясняет некоторые наиболее существенные свойства солнечных пятен, а именно цикличность их появления, группировку в обоих полушариях в определенных широтных зонах, перемещающихся к экватору по мере развития цикла, частое появление пар солнечных пятен с противоположной полярностью приблизительно на одинаковых широтах, причем ведущие пятна¹ в парах каждого цикла имеют одну и ту же полярность во всех парах одного полушария и противоположную полярность в другом полушарии. Основной недостаток этой теории заключается в исходном предположении о внезапных резких конвекционных всплесках в ядре Солнца. Вален объясняет их тем, что вращение препятствует конвекции

¹ Ведущим называется то пятно пары, которое первым появляется на краю солнечного диска в процессе его вращения.

в ядре в направлении, перпендикулярном оси Солнца; это обуславливает непрерывное нарастание температурного градиента, становящегося все более неустойчивым и приводящего в конце концов к конвекционной «вспышке». Мне кажется, что едва ли можно полностью воспрепятствовать конвекции, поэтому нельзя ожидать плавного нарастания степени неустойчивости, заканчивающегося резкой вспышкой. Во всяком случае, идея о том, что крутильные колебания могут вызывать солнечные пятна, не связана существенным образом с тем или иным конкретным механизмом и заслуживает внимания сама по себе.

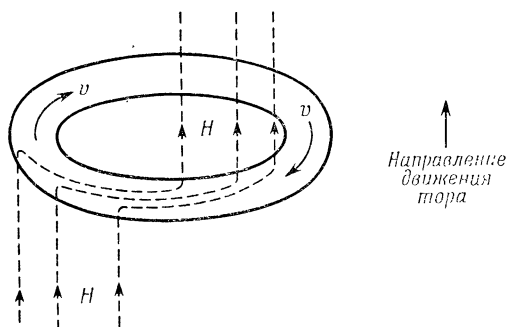
Крутильные колебания должны были бы вызывать изменения в видимом вращении поверхности Солнца, но таких изменений обнаружено не было. Однако Ричардсон и Шварцшильд [8] наблюдали широтные колебания с периодом в 23 года (т. е. в 2 раза больше длительности цикла солнечных пятен) с половинной амплитудой, равной $5,5^\circ$. Как указали эти авторы, вследствие неравномерного вращения Солнца такие широтные колебания означают, что отдельные участки жидкости попадают в широты, где их скорость то больше, то меньше скорости вращения на средней широте. Таким образом, хотя на заданной широте и не наблюдается заметных колебаний, каждый участок вещества может испытывать колебания по долготе, которые, по оценкам авторов, составляют 170° на широте 15° . Как полагают Ричардсон и Шварцшильд, это и есть ожидаемые крутильные колебания.

§ 5. Теория солнечных пятен Альфвена

Выдвинутая ранее (в 1942 г.) теория солнечных пятен Альфвена была основана на более непосредственном применении механизма магнитогидродинамических волн. Он предположил, что в неустойчивых частях ядра Солнца образуются вихревые кольца (где вещество вращается, как обод колеса вокруг оси), которые поднимаются к поверхности Солнца вдоль силовых линий общего магнитного поля Солнца (фиг. 9). Достигая поверхности Солнца, волны отражаются; в любой момент в процессе отражения вихревое кольцо пересекается с поверхностью Солнца в двух

точках, в которых и наблюдаются пятна противоположной полярности (фиг. 10).

Перемещение пятен к экватору во всех циклах можно объяснить, если предположить, что в ядре имеются две активные области (по одной в каждом полушарии), откуда выходят вихревые кольца. Все кольца выходят из ядра в один и тот же момент времени, но те из них, которые достигают поверхности на экваторе, должны пройти большее



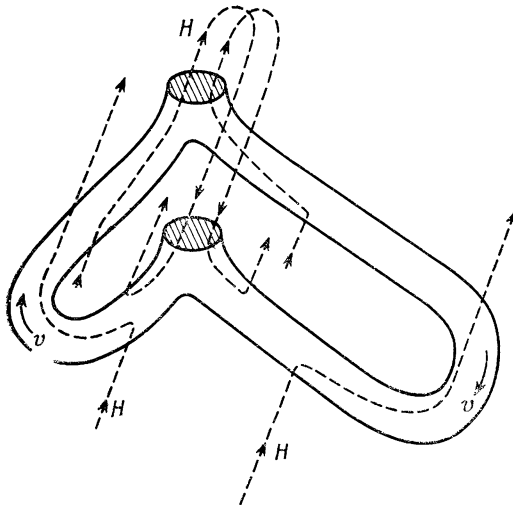
Фиг. 9. Направление движения и силовых линий для движущегося вихревого кольца.

Силовые линии показаны пунктиром; вещество циркулирует по кругу. Кольцо, поднимаясь, не несет с собой вещества, а движется сквозь вещество.

расстояние вдоль силовых линий, чем кольца, достигающие поверхности на больших широтах, и поэтому появляются позднее. Эта гипотеза дает правильное значение скорости перемещения зоны солнечных пятен к экватору при магнитном поле на поверхности, имеющем величину порядка 25 эрстед. Когда Альфвен выдвинул свою гипотезу, наблюдениями было установлено, что поле, по-видимому, имеет как раз такую величину. Однако теперь известно, что реальное поле по крайней мере в 10 раз меньше. В связи с этим возникают трудности в теории Альфвена, которые можно преодолеть, лишь предположив, что поле, определяемое по эффекту Зеемана, не совпадает с полем, обуславливающим перемещение солнечных пятен.

Согласно наблюдениям, в одном цикле все ведущие пятна в одном полушарии имеют одну полярность, а в сле-

дующем цикле — противоположную. Для объяснения этого обстоятельства Альфвен предполагает, что во всех вихревых кольцах данного цикла вращение происходит в одну сторону, а в следующем цикле — в противоположную. Он считает также, что между пятнами одного цикла в одном полушарии и пятнами следующего цикла в другом полу-



Ф и г. 10. Направление движения и силовых линий при отражении вихревого кольца от поверхности Солнца.

Заштрихованные площадки — солнечные пятна; в них вихревое кольцо пересекается с поверхностью Солнца. Правая часть кольца поднимается, левая — опускается.

шарии есть связь. Альфвен полагает, что когда из активной области ядра выходят к поверхности вихревые кольца, то одновременно с этим в противоположном направлении выходят вихри отдачи. Они движутся сквозь ядро к активной области ядра в другом полушарии и возбуждают ее активность в следующем цикле. Как показал Альфвен, данные наблюдений за солнечными пятнами действительно подтверждают наличие связи между пятнами в последовательных циклах.

В таком кратком изложении трудно отдать должное теории Альфвена. Она успешно объяснила многие свойства

солнечных пятен, особенно свойства, связанные с солнечными циклами. Однако следует отметить, что этот успех частично обусловлен рядом вспомогательных гипотез, как, например, предположением о направлении вращения вихревых колец или локализации активных областей ядра и об их перемежающемся действии. Трудно дать какое-нибудь обоснование этих предположений, за исключением того, что они нужны для теории.

Против теории Альфвена имеется ряд серьезных возражений. Согласно этой теории, магнитогидродинамические волны могут возникать в активных областях ядра вследствие конвекционной неустойчивости. Но если существует конвекционная неустойчивость, то она должна захватить значительную часть ядра, а не только некоторые изолированные области. Это привело бы не к образованию более или менее изолированных магнитогидродинамических волн, а к нерегулярному движению, беспорядочно взаимодействующему с сильно искаженными магнитными полями.

Далее, в теории предполагается, что поле солнечных пятен порождается значительно более слабым общим магнитным полем Солнца. Это означает, что в уравнениях (3.2) и (3.3) оказываются существенными члены второго порядка; учет этих членов нарушает простое представление о волнах, движущихся в противоположных направлениях вдоль силовых линий, и весьма затрудняет отделение основного вихревого кольца от вихря отдачи.

Для объяснения наблюдаемого движения солнечных пятен Альфвен вынужден предположить, что вихревое кольцо расположено вблизи плоскости, содержащей азимутальное направление и направление невозмущенного поля для данной точки; это также является недостатком теории. Действительно, как указывалось в § 3 гл. 2, кольцо может пройти сквозь устойчивую область между ядром Солнца и прилегающими к поверхности слоями лишь в том случае, если оно почти горизонтальное.

Но самым сильным возражением против теории Альфвена является то, что она не дает объяснения механизма образования магнитного поля солнечного пятна магнитогидродинамической волной. Возможность существования механизма отражения магнитогидродинамических волн от поверхности Солнца, при котором над поверхностью имелось

бы постоянное магнитное поле, представляется сомнительной. Так, например, на фиг. 10 вещество пересекает силовые линии, что, как известно, невозможно. Эта трудность является решающей для всей теории.

В силу приведенных соображений теорию Альфвена следует считать неудовлетворительной. Выдвигая свою теорию, Альфвен ввел понятие магнитогидродинамических волн и подчеркнул значение магнитного поля солнечных пятен. Эти идеи не потеряли своей ценности и сейчас. Остальные же стороны теории Альфвена, с моей точки зрения, носят более преходящий характер.

§ 6. Звезды с переменным магнитным полем

Исследование эффекта Зеемана показывает, что некоторые звезды обладают сильными магнитными полями порядка нескольких тысяч эрстед. Бэбкок, открывший такие поля, нашел, что часто они бывают переменными, а иногда даже периодически меняют знак. Наличие таких полей проще всего объяснить вращением звезды, магнитная ось которой не совпадает с осью вращения, благодаря чему в разные моменты времени наблюдаются разные участки поля. Последние исследования показывают, что такое объяснение является наиболее вероятным. Было выдвинуто и другое объяснение, согласно которому изменения магнитного поля связаны с колебаниями вещества звезды. Эта теория «магнитных колебаний» заслуживает краткого рассмотрения.

Большая часть математических решений этой задачи дана для простоты в предположении, что вещество звезды представляет собой однородную жидкость. При отсутствии магнитного поля такая звезда находится в безразличном равновесии, так как, если поменять местами два равных по массе объема вещества, равновесие не нарушится. При наличии магнитного поля появляются небольшие стабилизирующие силы. При этом возможны два типа колебаний. Колебания поверхности, относящиеся к первому типу, сопряжены с сильными изменениями внутреннего гравитационного поля. Периоды колебаний определяются в основном этими изменениями гравитационного поля, а слабые магнитные силы не играют почти никакой роли. Эти колебания происходят почти так же, как и в отсутствие магнит-

ного поля. В колебаниях второго типа движение поверхности происходит почти горизонтально, так что гравитационные силы играют здесь подчиненную роль по сравнению со стабилизирующим действием магнитного поля. Такие колебания аналогичны стоячим магнитогидродинамическим волнам. Периоды колебаний первого типа слишком малы, чтобы объяснить наблюдаемые изменения магнитного поля, а периоды колебаний второго типа оказываются слишком большими, если только не считать, что с глубиной магнитное поле возрастает быстрее, чем мы можем ожидать.

Предположение о том, что звезда является не жидкой, а газообразной, не избавляет от трудностей. В этом случае при отсутствии магнитного поля только чисто горизонтальные перемещения не нарушают равновесия. Таким образом, медленные колебания возможны лишь тогда, когда поверхность совершает почти горизонтальное движение; в большинстве колебаний основную роль играют силы тяжести, и периоды колебаний значительно меньше наблюдаемых.

Возможно существование небольшого числа колебаний, характеризующихся почти горизонтальным движением поверхности и обладающих периодом, близким к наблюдаемым значениям, т. е. промежуточным между периодом колебаний, определяемых гравитационными силами, и периодом чисто магнитных колебаний. Однако такие колебания представляют собой высшие гармоники с очень сильным затуханием, так что не ясно, почему именно они должны возбуждаться.

Однако наиболее решающим аргументом против теории магнитных колебаний является то обстоятельство, что она неспособна объяснить изменение знака магнитного поля. Электрические токи, связанные с магнитными колебаниями, должны течь главным образом под поверхностными слоями звезд. Действительно, хотя вызываемые токами силы очень малы, эти силы, если бы они действовали на крайне разреженный газ в поверхностных слоях, приводили бы к чрезвычайно сильным эффектам. Следовательно, магнитное поле в видимых слоях может быть найдено по потенциалу вне звезды. Далее, поскольку силовые линии фактически встроены в вещество, поверхность звезды должна пересекаться одними и теми же силовыми линиями во всех фазах колебаний. Последнее требование ограничивает число силовых линий, первое — их возможную ориентацию по отно-

шению к поверхности. Оба эти требования делают практически невозможным изменение знака поля, не считая, быть может, некоторых крутильных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfvén H., *Cosmical Electrodynamics*, London—New York, 1950; Ch. 4, 5. (Имеется перевод: Х. Альфвен, *Космическая электродинамика*, ИЛ, 1952.)
2. Alfvén H., *Tellus*, **5**, 423 (1953).
3. Bostick H., Levine M. A., *Phys. Rev.*, **87**, 671 (1952).
4. Cowling T. G., *Month. Not. Roy. Astr. Soc.*, **112**, 527 (1952).
5. Ferraro V. C. A., *Month. Not. Roy. Astr. Soc.*, **97**, 458 (1937).
6. Lehnert B., *Phys. Rev.*, **94**, 815 (1954). (Имеется перевод: ПСФ, вып. 7, ИЛ, 1957.)
7. Lundquist S., *Phys. Rev.*, **83**, 307 (1951).
8. Richardson R. S., Schwarzschild M., *Proc. 11th Volta Conf.*, Rome, 1953, p. 228.
9. Walén C., *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **30A**, No. 15 (1944).
10. Walén C., *Ark. Mat. Astr. Fys.*, **33A**, No. 18 (1946).
11. Walén C., *On the Vibratory Rotation of the Sun*, Stockholm, 1949.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Виды неустойчивости

В гидродинамике рассматривается неустойчивость двух видов. Первый вид неустойчивости наблюдается при нарушении ламинарного движения, что приводит к возникновению турбулентности; условием такой неустойчивости является большая величина числа Рейнольдса. Второй вид неустойчивости — конвекционная неустойчивость, приводящая к возникновению конвекции в жидкости, подогреваемой снизу. Критерием такой неустойчивости является значение числа Релея, зависящего от градиента температуры, теплопроводности и вязкости. Оба вида неустойчивости встречаются в условиях земной атмосферы, где вследствие больших размеров рассматриваемых областей вязкость оказывается недостаточной для обеспечения устойчивости.

Магнитное поле создает что-то вроде вязкого торможения в проводящей жидкости и тоже придает жидкости известного рода «жесткость». Поэтому можно ожидать, что магнитное поле ослабляет тенденцию к неустойчивости. В отношении неустойчивости течения этот вывод подтверждается опытами Гартмана и Лазаруса и Мургатройда (см. § 5 гл. 1). Недавние эксперименты с конвекционной неустойчивостью также указывают на аналогичное стабилизирующее действие магнитного поля.

Теоретические исследования неустойчивости основаны на методах теории возмущений. Предполагается, что первоначальное состояние равновесия или стационарного движения испытывает небольшое возмущение, пропорциональное $e^{\omega t}$, причем возможные значения ω определяются из уравнений движения и граничных условий. При изменении параметров системы следует различать два случая возникно-

вения неустойчивости. Во-первых, неустойчивость наблюдается при переходе ω^2 от отрицательных к положительным действительным значениям. Это соответствует переходу от колебательного движения к экспоненциально нарастающему. Во-вторых, неустойчивость имеет место, когда величина ω комплексна и ее действительная часть меняет знак с отрицательного на положительный. При этом возникают колебания с непрерывно нарастающей амплитудой. Последнее явление наблюдается в том случае, когда под действием возвращающей силы при колебаниях вещество снова переходит к невозмущенному состоянию со скоростью, превышающей скорость первоначального возмущения; поэтому подобную неустойчивость будем называть колебательной неустойчивостью (*overstability*).

Метод возмущений не всегда оказывается подходящим, особенно в задачах об устойчивости течения; иногда течение оказывается устойчивым для малых колебаний, но неустойчивым для больших. Однако в настоящее время мы не знаем никаких более совершенных методов.

§ 2. Неустойчивость течения

Недавно были теоретически рассмотрены два частных случая задач о неустойчивости потока жидкости между параллельными стенками. Стюарт [5] рассмотрел течение жидкости в однородном магнитном поле, параллельном стенкам. Такое поле не оказывает влияния на ламинарное течение, параллельное стенкам. Поэтому если стенки совпадают с плоскостями $y = \pm L$, то скорость ламинарного течения равна

$$V = V_0 \left(1 - \frac{y^2}{L^2} \right), \quad (4.1)$$

где V_0 — скорость посредине между стенками. Простота выражения (4.1) облегчает дальнейшие расчеты. Однако более близким к действительности будет случай, когда магнитное поле перпендикулярно стенкам и профиль скоростей ламинарного течения описывается более сложной формулой Гартмана (1.31). Этот случай рассмотрен Локком [4].

Как Гартман, так и Локк нашли, что неустойчивость легче всего вызывается двумерным возмущением, при котором движение происходит в плоскости, перпендикулярной стенкам и параллельной невозмущенным линиям потока. Оба автора считали магнитное число Рейнольдса R_M пренебрежимо малым. В отсутствие магнитного поля теоретическое условие неустойчивости приблизительно выражается неравенством $R > 5000$, где R — обычное число Рейнольдса, равное $\eta R_M/\nu$. Но для ртути отношение η/ν имеет величину порядка $6 \cdot 10^6$. Следовательно, если магнитное поле не слишком повышает критическое число Рейнольдса, то на границе устойчивости значение R_M действительно мало.

Для иллюстрации результатов, полученных Стюартом, достаточно рассмотреть случай, когда скорость \mathbf{V} невозмущенного движения параллельна невозмущенному полю \mathbf{H}_0 ; будем считать, что они направлены по оси Ox . Учитывая вязкость и подставляя $4\pi \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$, можно привести уравнение (1.5) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad } \tilde{\omega} + \frac{\mu}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (4.2)$$

где
$$\tilde{\omega} = \frac{p}{\rho} + \psi + \frac{\mu H^2}{8\pi\rho},$$

а через ψ , как и раньше, обозначен гравитационный потенциал. Уравнение (1.10), определяющее изменение магнитного поля, принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \eta \nabla^2 \mathbf{H}; \quad (4.3)$$

здесь мы учли соотношения $\text{div } \mathbf{H} = 0$ и $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

При малом возмущении стационарного течения скорость можно принять равной $\mathbf{V} + V_0 \mathbf{u}$, где \mathbf{u} — безразмерная величина, а V_0 — максимальная скорость невозмущенного движения [ср. с формулой (4.1)]. При этом $V_0 \mathbf{u}$ представляет собой малое возмущение скорости \mathbf{V} стационарного движения. Аналогично, положим магнитное поле равным $\mathbf{H}_0 + H_0 \mathbf{h}$; квадратами и произведениями малых величин \mathbf{h}

и \mathbf{u} будем пренебрегать. Тогда уравнения (4.2) и (4.3) примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = -\text{grad} \left(\frac{\Pi}{V_0} \right) + \frac{\mu H_0^2}{4\pi Q V_0} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} - V_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - h_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \eta \nabla^2 \mathbf{h}, \quad (4.5)$$

где через Π обозначено возмущение $\tilde{\omega}$.

Величины \mathbf{h} , \mathbf{u} , Π будем считать не зависящими от z , но зависящими от x и t через множитель

$$\exp \left[\frac{i a (x - cV_0 t)}{L} \right],$$

где a — действительное, а c — возможно, комплексное число. Это означает, что движение предполагается периодическим по x с периодом $2\pi L/a$. В отсутствие магнитного поля a и c оказываются порядка единицы для возмущений, наиболее способствующих неустойчивости; поэтому можно ожидать, что и при наличии магнитного поля они будут порядка единицы. Это означает, что в уравнении (4.5) можно пренебречь тремя членами в левой части, содержащими \mathbf{h} и h_y , по сравнению с членом, стоящим в правой части, так как их отношение к этому члену имеет величину, близкую к магнитному числу Рейнольдса $R_M = LV_0/\eta$.

Если пренебречь этими членами, то из уравнений (4.4) и (4.5) вместе с дополнительными условиями $\text{div} \mathbf{u} = 0$ и $\text{div} \mathbf{h} = 0$ можно вывести уравнение, содержащее лишь u_y — составляющую \mathbf{u} по оси Oy . Возьмем ротор от ротора уравнения (4.4). Тогда, поскольку $\text{rot rot} = \text{grad div} - \nabla^2$ получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) - \text{grad div} \left(V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) = \\ = \frac{\mu H_0^2}{4\pi Q V_0} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \mathbf{h} + \nu \nabla^4 \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Отсюда исключим \mathbf{h} с помощью упрощенного уравнения (4.5):

$$-V_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \eta \nabla^2 \mathbf{h}.$$

Тогда составляющая полученного векторного уравнения по оси Oy примет вид

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + V \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\mu H_0^2}{4 \pi q \eta} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \nu \nabla^4 u_y.$$

Это уравнение можно упростить, учитывая приведенный выше вид зависимости от x и t и переходя от V и y к новым безразмерным переменным U и Y :

$$U = \frac{V}{V_0}, \quad Y = \frac{y}{L}. \quad (4.6)$$

Уравнение принимает при этом следующий вид:

$$\begin{aligned} (U - c)(u_y'' - \alpha^2 u_y) - U'' u_y + i \alpha N u_y = \\ = - \frac{i}{\alpha R} (u_y^{(IV)} - 2 \alpha^2 u_y'' + \alpha^4 u_y), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где штрихи означают дифференцирование по Y . Здесь R — число Рейнольдса LV_0/ν , а N — безразмерный параметр, равный

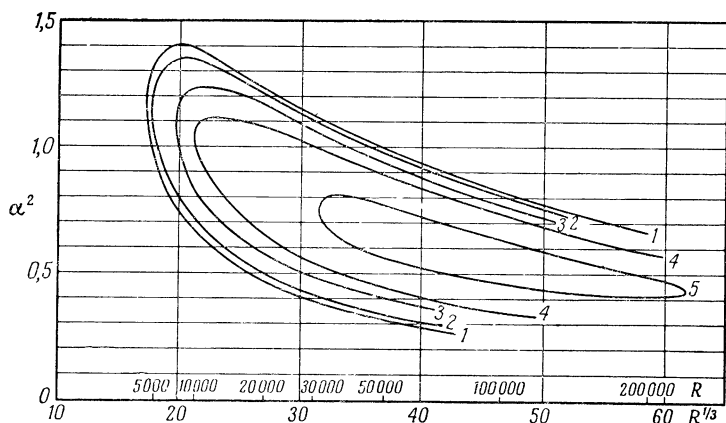
$$N = \frac{\mu H_0^2 L}{4 \pi q V_0 \eta} = \frac{\mu^2 H_0^2 L \sigma}{q V_0} \quad (4.8)$$

[ср. с формулой (1.25)]. Определив u_y из уравнения (4.7), можно выразить через него все остальные величины.

1. Условие неустойчивости Стюарта. Скорость должна обращаться в нуль на обеих стенках. Это означает, что производные $\partial u_x / \partial x$ и $\partial u_z / \partial z$ равны нулю на стенках; тогда из условия $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ вытекает, что $\partial u_y / \partial y = 0$ на стенках. Таким образом, уравнение (4.7) следует решать при граничных условиях $u_y = 0$, $u_y' = 0$ при $Y = \pm 1$.

Некоторые коэффициенты уравнения (4.7) мнимы. Поэтому в общем случае решение, удовлетворяющее четырем граничным условиям, может быть найдено лишь для комплексных значений c . Если c имеет положительную мнимую часть, то возникают нарастающие колебания, т. е. неустойчивость. Действительные значения c соответствуют границе области устойчивости. Было показано, что при заданных

значениях R и N действительные значения s возможны лишь для двух значений a (если они вообще возможны). Если a лежит между этими двумя значениями, то мнимая часть s положительна, т. е. имеет место неустойчивость. Если a лежит вне этого интервала, то колебания затухают. Ламинарное течение устойчиво при всех возможных малых



Фиг. 11. Кривые границ устойчивости при $Na = \text{const}$, рассчитанные Томасом.

1 — значение $Na = 0$; 2 — значение $Na = 0,01$; 3 — значение $Na = 0,03$;
4 — значение $Na = 0,05$; 5 — значение $Na = 0,08$.

отклонениях лишь в том случае, когда не существует значений a , при которых s было бы действительно.

Подробное изложение метода решения уравнения (4.7) дано в работе Стюарта [5]. Результаты численных расчетов приведены на фиг. 11, где даны кривые, соответствующие границам области устойчивости. Эти кривые изображают зависимость значений a^2 , при которых s действительно, от числа Рейнольдса R для различных значений $a N$. Если вертикальная прямая, соответствующая заданному значению R , пересекает одну из этих кривых, то для определенных значений a имеет место неустойчивость при соответствующем значении $a N$. Поэтому монотонное стягивание кривых по мере роста $a N$ означает монотонное уменьшение неустойчивости при увеличении магнитного поля. Судя по кривой 5, можно как будто бы сделать вывод, что при $a N = 0,08$

неустойчивости вообще не будет, если R превышает, скажем, 250 000. Этот результат едва ли можно считать правильным. Стюарт отмечает, что при столь больших значениях R нельзя оправдать, по крайней мере для ртути, пренебрежение членами с \mathbf{h} в левой части уравнения (4.5). По-видимому, этот вопрос заслуживает более подробного рассмотрения.

2. Условие неустойчивости Локка. Локк [4] рассмотрел течение жидкости в поперечном магнитном поле примерно в том же приближении, что и Стюарт. Локк нашел, что составляющая скорости u_y , перпендикулярная стенкам, удовлетворяет уравнению

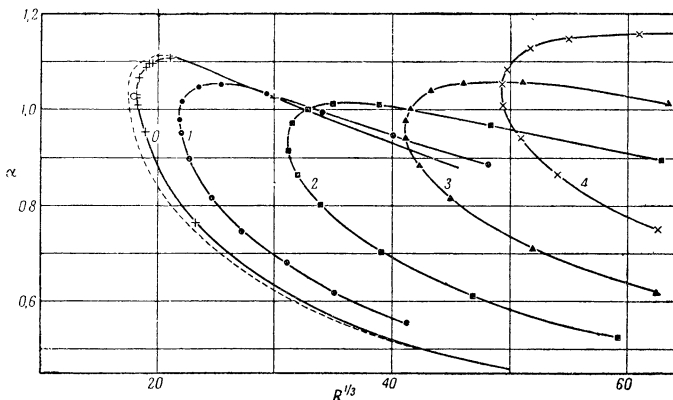
$$\begin{aligned} (U - c)(u_y'' - \alpha^2 u_y) - U'' u_y - iN \alpha^{-1} u_y' = \\ = -\frac{i}{\alpha R} (u_y^{(IV)} - 2\alpha^2 u_y'' + \alpha^4 u_y). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь U , c , α , R , N определяются через скорость V_0 в середине сечения; однако скорость $V \equiv V_0 U$ теперь определяется уже не формулой (4.1), а формулой Гартмана (1.31).

Далее, Локк отмечает, что для умеренных значений числа Гартмана M член, содержащий N , мал, так как N равно M^2/R , а R велико на границе области устойчивости. Стюарт использовал подобный член для учета стабилизирующего действия магнитного поля. Но в случае, рассмотренном Локком, магнитное поле приводит также к изменению профиля скоростей, т. е. к изменению вида функциональной зависимости U от Y . Этот эффект довольно сильно выражен даже при не слишком высоких значениях M (ср. фиг. 1), так что член, содержащий N , влияет на условия устойчивости значительно меньше, чем изменение профиля скоростей. Поэтому Локк опускает член с N ; при этом уравнение оказывается не зависящим от магнитного поля, если не считать зависимости профиля скоростей от магнитного поля.

Границы области устойчивости для задачи Локка приведены на фиг. 12. На графиках изображена зависимость α от R при постоянном числе Гартмана M , которое, согласно (1.23), пропорционально магнитному полю. Из кривых видно, что стабилизирующее действие поперечного магнитного поля значительно сильнее, чем продольного. В работе Стюарта

кривая $Na = q = 0,01$ соответствует значениям $M > 7$. Для больших M Локк нашел, что предельное значение R , при котором будет наблюдаться неустойчивость, имеет величину порядка $50\,000 M$. Лундквист еще раньше на основании общих соображений пришел к выводу, что критическое значение R должно быть пропорционально M ; опыты Мургатройда (см. § 5 гл. 1) подтверждают этот вывод.

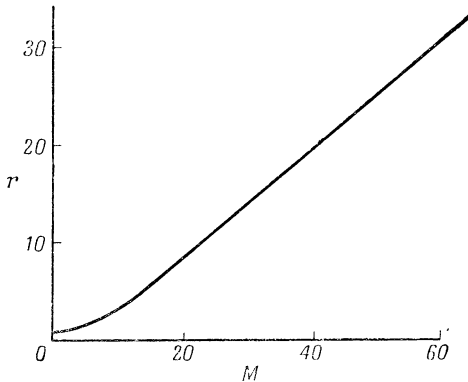


Фиг. 12. Кривые границ устойчивости для разных значений M . Цифры на кривых указывают значения M . Пунктиром изображена кривая, полученная Лином (для $M = 0$).

Однако, согласно данным Мургатройда, критическое значение R оказывается равным всего лишь $225 M$, т. е. значительно меньше величины, получающейся из теории Локка. Это расхождение Локк объясняет тем, что ламинарное течение более неустойчиво по отношению к конечным возмущениям, чем по отношению к бесконечно малым. Действительно, следует ожидать, что течение с гартмановским распределением скоростей, отличающимся большими градиентами скорости у стенок, будет особенно легко нарушаться умеренными возмущениями.

3. Вращающиеся цилиндры. Чандрасекар [1, 2] исследовал влияние магнитного поля на устойчивость течения жидкости между коаксиальными цилиндрами, вращающимися с различными скоростями. Такая задача для случая

отсутствия магнитного поля была рассмотрена Тейлором, который показал, что неустойчивость возникает скорее, если внутренний цилиндр вращается быстрее, чем внешний. Неустойчивость действительно была обнаружена экспериментально; она обусловлена, по-видимому, центробежным эффектом.



Ф и г. 13. Кривая, характеризующая неустойчивость движения между коаксиальными цилиндрами, вращающимися с различной угловой скоростью (по Чандрасекару).

M — число Гартмана; r — коэффициент, показывающий, во сколько раз нужно увеличить отношение угловых скоростей, чтобы при наложении поля достичь границы устойчивости.

Чандрасекар рассмотрел соответствующую магнитогидродинамическую задачу при некоторых упрощающих предположениях. Он принял, что оба цилиндра вращаются в одну сторону, причем внутренний вращается быстрее, и что разность радиусов цилиндров значительно меньше радиуса каждого цилиндра. Магнитное поле предполагается параллельным общей оси цилиндров. Цилиндры считаются идеально проводящими. Даже при всех этих упрощениях задача остается чрезвычайно сложной. Полученные Чандрасекаром результаты можно выразить с помощью числа Гартмана $M = \mu HL(\sigma/\rho v)^{1/2}$, где L — разность радиусов цилиндров. Они приведены на фиг. 13, где даны значения коэффициента r , показывающего, во сколько раз при наличии магнитного поля увеличиваются угловые скорости вращения,

при которых наступает неустойчивость. Стабилизирующее действие поля оказывается весьма существенным. Так, например, при разности радиусов цилиндров, равной 1 см, неустойчивость движения ртути в поле напряженностью 1000 эрстед возникает в том случае, когда цилиндры вращаются в 9 раз быстрее, чем при отсутствии магнитного поля.

§ 3. Конвекция

Задачи рассмотренного выше типа, касающиеся условий неустойчивости стационарного течения, представляют интерес в первую очередь для лабораторных исследований. Наоборот, задачи о конвекционной неустойчивости интересуют главным образом геофизиков (в применении к ядру Земли) и астрономов. Полная теория конвекционной неустойчивости в магнитном поле весьма сложна, однако качественное рассмотрение можно провести, не вникая в особые детали.

Простые соображения, выдвинутые Валеном, показывают, что магнитное поле может сильно влиять на конвекционную неустойчивость, если только размеры конвекционных ячеек в направлении магнитного поля не слишком велики. Вален интересовался астрономическими приложениями и поэтому считал поле замороженным в вещество. Механическое действие магнитного поля эквивалентно натяжению $\mu H^2/4\pi$ вдоль силовых линий и обусловленному им гидростатическому давлению $\mu H^2/8\pi$; последнее можно считать уравновешенным давлением самой жидкости и поэтому не учитывать. Пусть первоначально прямые силовые линии деформируются вследствие начавшейся конвекции в синусоиды с длиной волны λ . Обозначим (малое) смещение каждой точки через ξ . Тогда кривизна силовых линий будет равна $4\pi^2\xi/\lambda^2$ и натяжение $\mu H^2/4\pi$ приведет к объемной силе $\pi\mu H^2\xi/\lambda^2$, противодействующей дальнейшему изгибу силовых линий. При малых λ эта сила велика, так что конвекция в объеме, имеющем достаточно малый размер в направлении силовых линий, встречает сильное противодействие магнитного поля, которое может, по-видимому, предотвратить конвекцию.

Рассмотрим, например, подогреваемую снизу жидкость, находящуюся в горизонтальном магнитном поле. За счет

небольшого вертикального перемещения ξ температура T в некоторой точке повышается на величину $\xi\beta$, где β — температурный градиент, обусловленный подогревом. Если обозначить через α объемный коэффициент расширения, то уменьшение плотности ρ будет равно $\rho\xi\beta\alpha$ и результирующее действие силы тяжести и давления сводится к направленной вверх объемной силе с плотностью $\rho g\xi\beta\alpha$, стремящейся увеличить смещение. Магнитные силы противодействуют этому; неустойчивость будет наблюдаться лишь в том случае, когда эти силы очень слабы, т. е. когда

$$\lambda^2 \rho g \beta \alpha > \pi \mu H^2. \quad (4.10)$$

Таким образом, конвекция возникает лишь при длине волны λ , превышающей определенное минимальное значение.

Условие (4.10) выведено в пренебрежении диссипативными эффектами. Если их учесть, то условие неустойчивости становится гораздо менее жестким. Невозмущенное значение температуры равно $T_0 - \beta z$, где z — высота над исходным уровнем, на котором температура равна T_0 . В результате небольшого смещения ξ температура оказывается равной

$$T = T_0 - \beta z + \theta. \quad (4.11)$$

Если скорость жидкости равна \mathbf{v} , то уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) T = \kappa \nabla^2 T,$$

где κ — «коэффициент температуропроводности». Пользуясь соотношением (4.11) и ограничиваясь первыми степенями \mathbf{v} и θ , получаем

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta v_z + \kappa \nabla^2 \theta. \quad (4.12)$$

Аналогично, обозначим через \mathbf{H}_0 невозмущенное (однородное) магнитное поле, а через $\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ — поле при наличии возмущения. Тогда [см. уравнение (4.3)] с точностью до членов первого порядка относительно \mathbf{v} и \mathbf{h} уравнение для изменения магнитного поля принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = (\mathbf{H}_0 \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.12) и (4.13) показывают, что при отсутствии диссипативных эффектов возмущения θ и \mathbf{h} температуры и магнитного поля соответственно пропорциональны βv_z и $(\mathbf{H}_0 \cdot \text{grad})\mathbf{v}$. Рассмотрим теперь, как и раньше, стационарное движение, длина волны которого вдоль поля равна λ . Пусть движение происходит столь медленно, что диссипативными эффектами уже пренебречь нельзя. Такое движение приводит к состоянию, в котором $\partial\theta/\partial t = 0$ и $\partial\mathbf{h}/\partial t = 0$, причем влияние движения на распределение температуры и силовые линии компенсируется теплопроводностью и просачиванием силовых линий сквозь вещество. В этом стационарном состоянии

$$\begin{aligned}\nabla^2 \theta &= -\frac{4\pi^2 \theta}{\lambda^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{h} &= -\frac{4\pi^2 \mathbf{h}}{\lambda^2},\end{aligned}$$

так что теперь величинам βv_z и $(\mathbf{H}_0 \cdot \text{grad})\mathbf{v}$ пропорциональны соответственно $\kappa \theta$ и $\eta \mathbf{h}$. Это означает, что по сравнению со случаем отсутствия диссипации θ и \mathbf{h} соответственно умножаются на величины, пропорциональные $1/\kappa$ и $1/\eta$. В тех же отношениях меняются тепловые и магнитные силы. Таким образом, движение происходит ускоренно и приводит к неустойчивости при

$$\lambda^2 g \beta a \eta > \pi \mu H_0^2 \kappa. \quad (4.14)$$

Это условие не является строгим, так как не учитывает вязкости; в общем случае условие неустойчивости обычно более жестко. Однако некоторые соображения показывают, что при $\kappa < \eta$ неустойчивость может наступить и при нарушении условия (4.10).

Последнее неравенство с запасом выполняется для ртути ($\eta/\kappa > 10^5$) и других веществ, применяемых в лабораторных опытах. Поэтому следует ожидать, что при лабораторных опытах условие неустойчивости должно определяться соотношением типа (4.14).

В астрономических задачах дело обстоит иначе. Изложенная выше теория применима лишь к жидкостям, однако при некоторых условиях ее можно видоизменить так,

чтобы она была применима к ионизованным газам и звездам. Изменения заключаются в том, что под β следует понимать превышение градиента температуры над его адиабатическим значением, а a считать равным $1/T$ (так как изменения давления на заданном уровне предполагаются малыми). Кроме того, в космических задачах κ представляет собой коэффициент температуропроводности, обусловленный радиационной передачей тепла, который весьма велик. Отсюда следует, что отношение η/κ может быть много меньше единицы. В этом случае условием обычной устойчивости является неравенство (4.10), а не (4.14), если возмущения достаточно велики, чтобы диссипативные эффекты играли незначительную роль. Однако устойчивость может быть нарушена вследствие возбуждения колебаний нарастающей амплитуды (колебательная неустойчивость).

Предположим, что условие (4.10) не выполняется. Тогда возможны вертикальные колебания с длиной волны λ в направлении поля; при этом магнитная возвращающая сила подавляет неустойчивость, обусловленную температурным градиентом. В течение каждого полупериода колебаний, при которых происходит смещение вещества в ту или иную сторону от равновесия, разность температур, обуславливающая неустойчивость за счет теплопроводности, уменьшается на величину, пропорциональную κ . Аналогично, возмущение магнитного поля за счет электропроводности уменьшается на величину, пропорциональную η . Таким образом, при возвращении к равновесному положению результирующая возвращающая сила (разность сил, обусловленных магнитным полем и температурным градиентом) превышает силу, вызывающую отклонение от него, если

$$\lambda^2 \rho g \beta a \kappa > \pi \mu H_0^2 \eta. \quad (4.15)$$

При выполнении этого условия вещество возвращается к положению равновесия с большей скоростью, чем отклоняется от него, так что колебания непрерывно нарастают. Поскольку условие (4.10) не выполняется, условие (4.15) может выполняться лишь при $\eta < \kappa$. Как и предыдущие условия, (4.15) получено в пренебрежении вязкостью. При ее учете получается значительно более жесткое условие устойчивости.

Точная теория. Подробное математическое исследование конвекционной неустойчивости было проведено Томпсоном [7] и Чандрасекаром [1, 2]. Значительная часть трудностей этой проблемы связана с формулировкой граничных условий; мы постараемся в дальнейшем по возможности обходить этот вопрос.

Рассмотрим подогреваемую снизу жидкость, находящуюся в поле тяжести между горизонтальными плоскостями $z = 0$ и $z = L$. Горизонтальное магнитное поле рассматривать нецелесообразно, так как при некоторых смещениях такое поле не оказывает вообще никакого влияния на устойчивость. Чандрасекар показал, что на границе устойчивости движение происходит валами, оси которых горизонтальны и параллельны вертикальным плоскостям, проходящим через силовые линии. В движении такого типа горизонтальные составляющие поля не влияют на устойчивость, так что ими можно пренебречь. Поэтому мы примем, что невозмущенное магнитное поле \mathbf{H}_0 представляет собой однородное вертикальное поле.

Уравнения (4.11)—(4.13) полностью применимы и в этом случае, причем входящие в них переменные сохраняют прежний смысл. Поскольку коэффициент объемного расширения α мал, то из (4.11) следует, что

$$\varrho = \varrho_0 [1 + \alpha(\beta z - \theta)], \quad (4.16)$$

где ϱ_0 — невозмущенное значение плотности при $z = 0$. Уравнение движения имеет вид

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} = -\text{grad} \left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi} \right) + \varrho \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \varrho \mathbf{g}.$$

Здесь изменение ϱ нужно учитывать лишь в последнем члене справа; в остальных членах вместо ϱ можно подставить ϱ_0 . Полагая $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ и сохраняя лишь члены первого порядка относительно \mathbf{v} , θ и \mathbf{h} , получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\mu}{4\pi\varrho_0} (\mathbf{H}_0 \cdot \text{grad}) \mathbf{h} = -\text{grad} \tilde{\omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \alpha \theta \mathbf{g}, \quad (4.17)$$

где

$$\tilde{\omega} = \frac{p}{\varrho_0} + \frac{\mu H^2}{8\pi\varrho_0} + gz + \frac{1}{2} \alpha \beta gz^2.$$

Векторы \mathbf{h} и \mathbf{v} удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.18)$$

Уравнения (4.12), (4.13), (4.17) и (4.18) являются исходными для рассматриваемой задачи. Они линейны; из них можно вывести уравнение для вертикальной составляющей w скорости \mathbf{v}

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \nabla^2 w = \\ & = \frac{\mu H_0^2}{4 \pi \rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \alpha \beta g \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Чтобы избежать подробного анализа граничных условий, рассмотрим решения, периодические по x , y и z , а именно пропорциональные $\exp [\omega t + i(Lx + my)] \sin (\pi z/L)$. Один из вариантов граничных условий, рассмотренных Чандра-секаром (а именно соответствующий «свободным» граничным поверхностям), приводит к периодическим решениям такого вида. Рассматриваемые граничные условия несколько искусственны, однако результаты все же дают некоторое представление о поведении реальных жидкостей.

Если принять указанный вид периодических решений, то уравнение (4.19) сводится к

$$\begin{aligned} & (\omega + \kappa \vartheta^2) (\omega + \nu \vartheta^2) (\omega + \eta \vartheta^2) \vartheta^2 = \\ & = \alpha \beta g (\omega + \eta \vartheta^2) \left(\vartheta^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) - \\ & - \left(\frac{\pi \mu H_0^2 \vartheta^2}{4 \rho_0 L^2} \right) (\omega + \kappa \vartheta^2), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$\vartheta^2 = l^2 + m^2 + \frac{\pi^2}{L^2}. \quad (4.21)$$

В пренебрежении диссипативными эффектами, в (4.20) следует положить $\kappa = \nu = \eta = 0$, так что это уравнение примет вид

$$\omega^2 \vartheta^2 = \alpha \beta g \left(\vartheta^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) - \frac{\pi \mu H_0^2 \vartheta^2}{4 \rho_0 L^2}. \quad (4.22)$$

При заданном ϑ неустойчивость возникает при переходе ω^2 от отрицательных значений к положительным. Следовательно, граница устойчивости имеет место при

$$\pi\mu H_0^2 = 4 L^2 \varrho_0 g \alpha\beta \left(1 - \frac{\pi^2}{L^2 \vartheta^2}\right). \quad (4.23)$$

При заданной глубине жидкости неустойчивость более вероятна при больших ϑ . В этом случае соотношение (4.23) принимает вид

$$\pi\mu H_0^2 = 4 L^2 \varrho_0 g \alpha\beta. \quad (4.24)$$

Величина $2L$ представляет собой длину волны возмущения в направлении поля; отсюда видно, что (4.24) эквивалентно условию (4.10), выведенному выше для горизонтального поля.

При учете диссипативных эффектов условие возникновения обычной неустойчивости заключается в том, что один из корней уравнения (4.20) становится положительным. Граница устойчивости соответствует $\omega = 0$, т. е. определяется уравнением

$$\alpha\beta g \left(\vartheta^2 - \frac{\pi^2}{L^2}\right) = \frac{\pi\mu H_0^2 \kappa \vartheta^2}{4 \varrho_0 \eta L^2} + \kappa\nu\vartheta^6. \quad (4.25)$$

Положим

$$R' = \frac{g \alpha\beta L^4}{\kappa\nu},$$

$$M^2 = \frac{\mu L^2 H_0^2}{4 \pi \varrho_0 \nu \eta} \equiv \frac{\sigma \mu^2 H_0^2 L^2}{\varrho_0 \nu}, \quad (4.26)$$

$$s = \frac{\vartheta^2 L^2}{\pi^2}.$$

Здесь M — число Гартмана, R' — число Релея, величина которого является критерием неустойчивости при отсутствии магнитного поля, а s — число, большее единицы, характеризующее рассматриваемое возмущение. В этих обозначениях уравнение (4.25) принимает вид

$$R' (s - 1) = \pi^2 M^2 s + \pi^4 s^3. \quad (4.27)$$

Граница устойчивости определяется крайним значением R' , при котором уравнению (4.27) удовлетворяют положительные действительные значения s . Поскольку при любом положительном R' уравнение (4.27), являясь кубическим уравнением относительно s , имеет один отрицательный действительный корень, положительные значения s возможны лишь в том случае, когда это уравнение имеет три действительных корня. Поэтому граница устойчивости соответствует крайнему значению R' , при котором кубическое уравнение для s имеет три действительных корня. Можно показать, что это значение R' удовлетворяет уравнению

$$(R' - \pi^2 M^2)^3 = \frac{27}{4} \pi^4 R'^2. \quad (4.28)$$

Таким образом, при $M = 0$ (т. е. в отсутствие магнитного поля) критическое значение $R' = (27/4) \pi^4$; при наличии магнитного поля критическое значение R' повышается, особенно при большой глубине жидкости. Так, например, полагая $L = 1$ см и $H_0 = 1000$ эрстед, получаем для ртути $M^2 = 600$; при этом критическое значение R' равно приблизительно $100 \pi^4$, т. е. в 15 раз больше, чем при отсутствии магнитного поля. С возрастанием поля повышается и критическое значение s , откуда следует, что на границе устойчивости размеры конвекционных ячеек в направлении, перпендикулярном полю, уменьшаются и движение становится все более близким к вертикальному. При малой вязкости или при большом L величины R' и M велики и $R'/M^2 = \pi^2$, т. е.

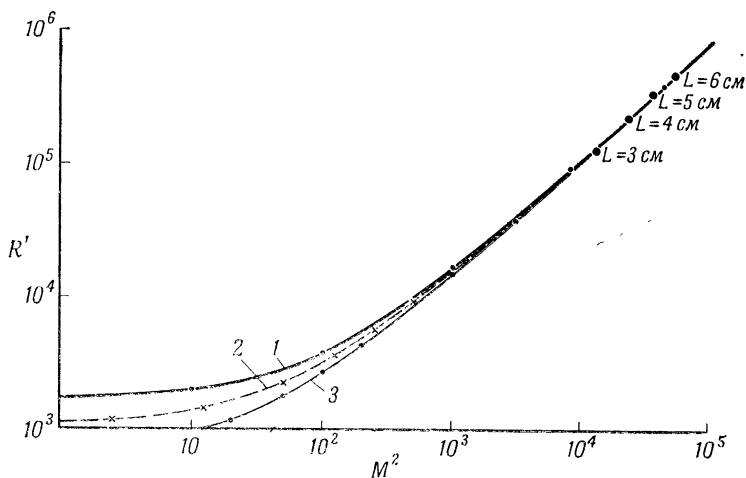
$$4 L^2 \rho_0 g \alpha \beta \eta = \pi \mu H_0^2 \kappa;$$

это эквивалентно неравенству (4.14), выведенному ранее для горизонтального поля.

На фиг. 14 сопоставлены экспериментальные данные Накагавы для ртути и теоретические результаты для граничных условий трех типов.¹ Теоретические данные хорошо согласуются с экспериментальными, несмотря на то, что в экспериментах магнитное поле заметно отличалось от однородного. Следует заметить, что для больших чисел Гартмана получаются практически одинаковые кривые для различных граничных условий.

¹ Nature, 175, 417 (1955).

Переход к колебательной неустойчивости означает переход от затухающих колебаний к возрастающим. Граница устойчивости соответствует тогда чисто мнимым значениям ω



Фиг. 14. Зависимость критического числа Рейля от числа Гартмана M .

Кривыми показаны теоретические значения, полученные Чандрасекаром для различных граничных условий, рассматриваемых в тексте; кружками — экспериментальные результаты Накагавы; L — глубина слоя ртути.

1 — обе границы жесткие; 2 — одна граница жесткая, другая свободная; 3 — обе границы свободные.

в уравнении (4.20). Это означает, что уравнение должно распасться на множители типа

$$(\omega + a)(\omega^2 + b^2) = 0,$$

где a и b действительны. Поскольку предполагается, что обычной неустойчивости в этом случае нет, a должно быть положительно. Отсюда следует прежде всего, что если перенести все члены в уравнении (4.20) в одну часть равенства, то произведение коэффициентов перед ω^2 и ω должно быть равно произведению коэффициента перед ω^3 на свободный член. Это приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \vartheta^6 \kappa \nu \eta - \alpha \beta g \eta \left(\vartheta^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) + \left(\frac{\pi \mu H_0^2}{4 L^2 \varrho_0} \right) \kappa \vartheta^2 = \\ & = (\kappa + \nu + \eta) \left[(\kappa \nu + \nu \eta + \eta \kappa) \vartheta^6 - \alpha \beta g \left(\vartheta^2 - \frac{\pi^2}{L^2} \right) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\pi \mu H_0^2 \vartheta^2}{4 \varrho_0 L^2} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы a и b^2 были положительными, обе части равенства должны быть положительны. Вводя M , R' и s , согласно соотношениям (4.26), получаем

$$R' (s - 1) = M^2 \pi^2 s \frac{\eta (\nu + \eta)}{\kappa (\nu + \kappa)} + \pi^4 s^3 \frac{(\eta + \kappa)(\eta + \nu)}{\kappa \nu} \quad (4.29)$$

и

$$R' (s - 1) < M^2 \pi^2 s + \pi^4 s^3. \quad (4.30)$$

Очевидно, оба условия совместимы лишь при $\eta < \kappa$; таким образом, колебательная неустойчивость возможна лишь в этом случае.

Граница колебательной неустойчивости соответствует крайнему значению R' , для которого уравнение (4.29) имеет положительный корень s . Оно определяется соотношением

$$\left(R' - M^2 \pi^2 \frac{\eta (\nu + \eta)}{\kappa (\nu + \kappa)} \right)^2 = \frac{27}{4} R'^2 \pi^4 \frac{(\kappa + \eta)(\nu + \eta)}{\kappa \nu}. \quad (4.31)$$

При большом M и не слишком малом отношении η/κ выражение приближенно приводится к виду

$$R' = \pi^2 M^2 \frac{\eta (\nu + \eta)}{\kappa (\nu + \kappa)},$$

что эквивалентно (4.15) при малых ν . Если же κ значительно больше η и ν , то можно использовать другое приближение. В общем случае вызывающие неустойчивость силы, стоящие в правой части соотношения (4.24), имеют величину того же порядка, что и обусловленные магнитным полем возвращающие силы, стоящие в левой части. Это означает, что $R' \sim \eta \pi^2 M^2 / \kappa$. Поэтому, если κ велико по сравнению с η и ν , то член с M^2 в левой части уравнения (4.31) будет

гораздо меньше R' . Значение R' , определяемое уравнением (4.31), оказывается в этом приближении не зависящим от M и равным $(27/4)\pi^4(\nu + \eta)/\nu$. Таким образом, в этом случае условие колебательной неустойчивости почти не зависит от магнитного поля.

§ 4. Темный цвет солнечных пятен

Автор попытался, следуя предположению Бирмана, объяснить более темный цвет солнечных пятен влиянием магнитного поля на конвекцию. Как известно, в непосредственно прилегающих к поверхности Солнца слоях происходит интенсивная конвекция, так как благодаря излучению там устанавливаются градиенты температур, превышающие адиабатические. В этих слоях перенос энергии наружу происходит главным образом за счет конвекции, что проявляется в яркой грануляции на поверхности Солнца. Если конвекционное движение в каком-то месте будет приостановлено или сильно ослаблено магнитным полем, то количество приносимой тепловой энергии будет здесь значительно меньше, чем на остальной поверхности, вследствие чего образуется холодное пятно. Сам факт длительного существования магнитного поля солнечного пятна показывает, что магнитное поле как-то влияет на конвекцию. Действительно, слишком интенсивная конвекция привела бы к перемешиванию вещества вне и внутри пятна, а следовательно, и к расплыванию и ослаблению поля.

Согласно соотношениям (4.10) и (4.24), магнитное поле препятствует интенсивному перемешиванию вещества Солнца при $\pi H_0^2/\lambda^2 > \rho_0 a \beta g$, где λ — длина волны возмущения в вертикальном направлении и $a = 1/T$. Полагая для поверхностных слоев Солнца $\beta = 2$ град/км, $T = 20\,000^\circ\text{К}$, $\rho_0 = 10^{-5}$ г/см³ и $H_0 = 3000$ эрстед, получаем, что это неравенство выполняется при $\lambda < 3000$ км. Однако наибольшее возможное значение λ , вероятно, должно быть меньше значения высоты, на которой давление падает, в e раз, а для Солнца эта высота не превышает 1000 км. Таким образом, влияние магнитного поля, по-видимому, достаточно сильно, чтобы воспрепятствовать интенсивной конвекции вещества в слоях, находящихся под поверхностью пятна.

Как указал Чандрасекар, стабилизирующее действие магнитного поля может быть нарушено колебательной неустойчивостью. Для слоя, находящегося у основания солнечной атмосферы, он приводит значения $\kappa \approx 10^{13}$, $\nu \approx 5 \cdot 10^3$, $\eta \approx 7 \cdot 10^6$ $\text{см}^2/\text{сек}$. Значение κ , возможно, несколько завышено; поэтому следует пользоваться значением κ для несколько более высокого слоя, скажем $\kappa \approx 10^{11}$ $\text{см}^2/\text{сек}$. Во всяком случае, и этого значения достаточно, чтобы отношение κ/η было велико и чтобы при $L > 100$ км имела место колебательная неустойчивость.

Я не считаю это возражение существенным. Наличие колебательной неустойчивости еще не приводит к перемещению вещества. Колебательная неустойчивость обусловлена тем, что магнитные силовые линии стремятся сократиться слишком быстро. Поэтому маловероятно, чтобы указанное обстоятельство могло привести к запутыванию и искажению поля. Кроме того, солнечные пятна не изолированы от окружающей среды подобно тому, как это имеет место для жидкости, рассмотренной в настоящей главе. Поэтому и волны в солнечных пятнах представляют собой не стоячие, а бегущие магнитогидродинамические волны, скорость распространения которых составляет около 1 км/сек. Колебательная неустойчивость означает, что энергия этих магнитогидродинамических волн возрастает по мере их распространения в области с градиентом, превышающим адиабатический. Отсюда отнюдь не следует, что в какой-либо точке движение неограниченно нарастает.

Таким образом, хотя колебательная неустойчивость и вызывает волнообразные движения магнитных силовых линий, она не влияет на общую картину поля. Поскольку силовые линии вморожены в вещество, конвекция в солнечном пятне ограничена главным образом движением вверх и вниз по силовой линии; круговому движению препятствует магнитное поле. Это означает, что, хотя конвекция в солнечном пятне и не исключается полностью, все же магнитное поле в достаточной мере воздействует на движение, чтобы значительно уменьшить передачу тепла вверх. Вполне возможно, что темный цвет солнечных пятен объясняется рассмотренным процессом. Одна из теорий, основанных на этих представлениях, была впервые предложена Хойлем [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc., **216A**, 293 (1953).
(Имеется перевод: ПСФ, вып. 2, ИЛ, 1954.)
2. Chandrasekhar S., Phil. Mag., **43**, 501 (1952); **45**, 1117 (1954).
3. Hoyle F., Recent Researches in Solar Physics, Cambridge, 1949, p. 10.
4. Lock R. C., Proc. Roy. Soc., **233A**, 105 (1955).
5. Stuart J. T., Proc. Roy. Soc., **221A**, 189 (1954).
6. The Sun, ed. G. Kuiper, Chicago, 1954, Ch. 8. (Имеется перевод: «Солнце», под ред. Койпера, ИЛ, 1957.)
7. Thompson W. B., Phil. Mag., **42**, 1417 (1951).
8. Walén C., On the Vibratory Rotation of the Sun, Stockholm, 1949.

ТЕОРИИ ГЕНЕРАЦИИ ПОЛЯ

§ 1. Постановка задачи

Задача объяснения магнитных полей Земли и звезд до сих пор не получила вполне удовлетворительного разрешения. Наличие постоянных магнитов исключено высокими температурами звезд. При исследовании термоэлектрических эффектов не удалось, по крайней мере в звездах, найти такого эффекта, который мог бы привести к полям, сопоставимым по величине с существующими. Единственная теория, которая, по-видимому, способна объяснить наблюдаемые поля, это теория генерации (теория «динамо»). Она объясняет магнитное поле электрическими токами, индуцируемыми в веществе при пересечении им силовых линий магнитного поля, подобно тому как это происходит в генераторе с самовозбуждением.

При грубом применении идеи генерации поля можно легко прийти к поразительным, но ошибочным результатам. Так, движение со скоростью \mathbf{v} поперек силовых линий магнитного поля приводит к появлению индуцированного электрического поля $\mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]$, т. е. вызывает ток, плотность \mathbf{j} которого примерно равна $\mu \sigma v H$. Однако $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$, так что для поддержания поля \mathbf{H} в области размером L плотность тока должна иметь величину порядка $H/4\pi L$. Приравнявая это выражение к $\mu \sigma v H$, находим, что для поддержания поля необходима скорость порядка $(4\pi \mu \sigma L)^{-1}$. Для Солнца можно принять $\sigma = 10^{-5}$ ед. CGSM и $L = 7 \cdot 10^{10}$ см, откуда скорость v получается равной всего лишь 10^{-7} см/сек. Очевидно, что на Солнце скорость гораздо выше; таким образом, задача как будто состоит не в том, чтобы найти причину существования магнитного поля Солнца, а в том, чтобы объяснить, почему оно не достигает колоссальных значений.

Ошибочность приведенных рассуждений заключается, конечно, в том, что в действительности линии магнитного поля движутся почти с той же скоростью, что и вещество, поэтому электрический ток едва ли определяется полем $\mu [v \cdot H]$. Вопрос о магнитном поле Солнца нельзя решить с помощью простого механизма индукции, описанного выше. Нужно объяснить, почему при почти жестко вмороженных в вещество силовых линиях магнитного поля возможно сохранение и возникновение магнитного поля. Эта задача значительно более сложна.

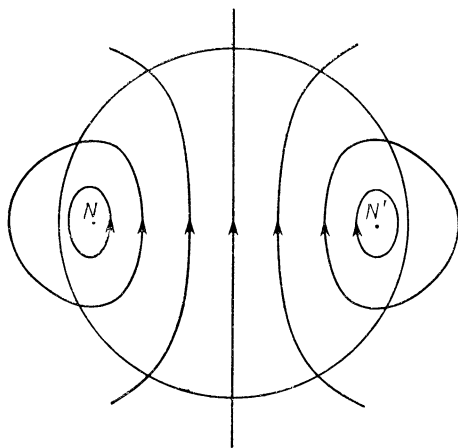
Для полного решения задачи о генерации магнитного поля потребовалось бы решить совместно систему гидродинамических и электромагнитных уравнений, т. е. показать, что существует движение, при котором заданное магнитное поле сохраняется, и что это движение может поддерживаться силами, возникающими в этом поле. Очевидно, трудности такого общего подхода непреодолимо велики. Поэтому обычно ограничиваются более узкой задачей: движение считается заданным, и исследуется вопрос о том, может ли при таком движении поддерживаться магнитное поле. Уравнения движения используются лишь для того, чтобы убедиться, что рассматриваемое движение вообще правдоподобно.

Эта задача рассматривается обычно в двух вариантах. В первом ищется стационарное движение, которое дает строго постоянное поле. Во втором предполагается, что поле и движение не стационарны, но обладают некоторыми постоянными характеристиками; чаще всего здесь рассматривают развитую турбулентность. Мы начнем с рассмотрения стационарного случая.

§ 2. Симметричные поля

В 1934 г. мне удалось показать [5], что магнитное поле, симметричное относительно оси, не может быть создано симметричным движением. Рассмотрим, например, случай, когда движение происходит в меридиональных плоскостях, проходящих через ось симметрии, и силовые линии тоже лежат в меридиональных плоскостях. В каждой плоскости силовые линии должны образовывать замкнутые кривые, имеющие два «центра»: N и N' (фиг. 15). Поскольку в

меридиональной плоскости вблизи точки N силовые линии окружают точку N , магнитное поле в этой точке равно нулю, но плотность тока, определяемая соотношением $4\pi \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$, отлична от нуля. Электрические токи текут по азимуту, по окружностям, центры которых лежат на



Ф и г. 15. Силовые линии аксиально-симметричного поля сферы в плоскости, проходящей через ось симметрии.

оси симметрии. Они не могут быть обусловлены электростатическими полями. В точке N они не могут быть обусловлены и силой $\mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]$, так как в этой точке $\mathbf{H} = 0$. Таким образом, точное сохранение такого поля невозможно.

Это можно доказать и другим способом. Изменение поля определяется движением, стремящимся увлечь магнитные силовые линии, и конечной проводимостью, которая приводит к тому, что поле будет растекаться и вследствие этого затухать. В симметричном случае движение лишь перемещает силовые линии в меридиональных плоскостях, но не приводит к появлению новых силовых линий. Поэтому диффузионное затухание поля ничем не компенсируется, так что постоянное поле невозможно. Для доказательства существенно, что силовые линии образуют замкнутые кривые, стягивающиеся в точку при затухании поля; его

нельзя непосредственно применить к полям с незамкнутыми силовыми линиями.

Точно так же можно показать, что генерация магнитного поля невозможна и в целом ряде других простых полей, характеризующихся тем, что силовые линии поля лежат на семействе конечных поверхностей. Большая часть простых полей, которые можно себе представить, относится к этому классу. Поэтому генерация поля возможна (если она возможна вообще) лишь для магнитных полей сложной формы. Это обстоятельство затрудняет наглядное представление механизма генерации поля.

§ 3. Теория Эльзассера

В 1946 г. Эльзассер [7] провел систематическое исследование проблемы генерации поля. Здесь мы изложим его результаты в несколько измененной форме, опустив некоторые детали.

Рассмотрим магнитное поле в однородном теле типа жидкого шара с электропроводностью σ . Уравнения поля внутри тела имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 4\pi \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + \mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Вне тела третье уравнение заменяется условием $\mathbf{j} = 0$.

Прежде всего уравнения (5.1) следует свести к одному интегральному уравнению. Обозначим через \mathbf{H}' поле, обусловленное токами \mathbf{j}' в теле. Тогда

$$\frac{1}{\sigma} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' d\tau = \int (\mathbf{E} + \mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]) \cdot \mathbf{j}' d\tau,$$

где интегрирование можно распространить на все пространство, так как вне тела $\mathbf{j}' = 0$. При этом

$$4\pi \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}' d\tau = \int \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}' d\tau = \int \operatorname{div} [\mathbf{H}' \cdot \mathbf{E}] d\tau + \int \mathbf{H}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} d\tau.$$

В соответствии с теоремой Грина первый интеграл в правой части равен нулю (скачки непрерывности на границе тела несущественны, так как тангенциальные составляющие \mathbf{H}' и \mathbf{E} остаются непрерывными на поверхности тела). Отсюда

$$\frac{4\pi}{\mu\sigma} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' d\tau = 4\pi \int [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{j}' d\tau - \int \mathbf{H}' \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} d\tau. \quad (5.2)$$

Это уравнение эквивалентно уравнениям (5.1) при произвольных \mathbf{j}' и \mathbf{H}' .

Введем теперь «нормальные затухающие поля». Это поля, удовлетворяющие уравнениям (5.1) при $\mathbf{v} = 0$ и затухающие по экспоненциальному закону: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r e^{-\lambda_r t}$. Существует дискретная совокупность таких полей, соответствующая совокупности собственных значений λ_r . Начальные поля \mathbf{H}_r и соответствующие плотности токов \mathbf{j}_r удовлетворяют условиям ортогональности

$$\begin{aligned} \int \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{H}_s d\tau &= 0, \\ \int \mathbf{j}_r \cdot \mathbf{j}_s d\tau &= 0 \quad (r \neq s). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Чтобы доказать это, положим в уравнении (5.2) $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r$, $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_s$ и $\mathbf{v} = 0$. Тогда $\partial \mathbf{H} / \partial t = -\lambda_r \mathbf{H}_r$ и

$$\frac{4\pi}{\mu\sigma} \int \mathbf{j}_r \cdot \mathbf{j}_s d\tau = \lambda_r \int \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{H}_s d\tau.$$

Но из симметрии интегралов ясно, что такое же уравнение получится, если λ_r заменить на λ_s . Отсюда следует уравнение (5.3). Поля \mathbf{H}_r мы нормируем так, чтобы

$$\int H_r^2 d\tau = 1; \quad (5.4)$$

при этом

$$\int j_r^2 d\tau = \frac{\mu\sigma\lambda_r}{4\pi}. \quad (5.5)$$

Совокупность полей \mathbf{H}_r образует полную систему. Это значит, что произвольное поле \mathbf{H} , создаваемое токами внутри тела, может быть представлено в виде ряда

$$\mathbf{H} = \sum_r \beta_r \mathbf{H}_r. \quad (5.6)$$

Пусть поле \mathbf{H} , удовлетворяющее уравнениям (5.1) при $\mathbf{v} \neq 0$, представлено в виде ряда (5.6), в котором коэффициенты β_r зависят от времени. Подставляя (5.6) в (5.2) и полагая $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_s$, найдем уравнения, определяющие изменение коэффициентов β_s со временем

$$\frac{d\beta_s}{dt} = -\lambda_s \beta_s + \sum_r \alpha_{rs} \beta_r, \quad (5.7)$$

где

$$\alpha_{rs} = 4\pi \int [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_r] \cdot \mathbf{j}_s d\tau. \quad (5.8)$$

При выводе уравнения (5.7) использованы соотношения (5.3)—(5.5).

При анализе вековых изменений земного магнитного поля Эльзассер пользовался уравнениями типа (5.7). Такую постановку задачи можно считать оправданной. Действительно, вековые изменения магнитного поля на поверхности Земли во многом схожи с изменениями, вытекающими из предположения о конвекции в ее жидком ядре. При конвекции магнитные силовые линии увлекались бы веществом; изменения поля на границе ядра быстро поднимались бы к поверхности Земли по слабо проводящей твердой оболочке ядра. Изменения поля на поверхности Земли действительно напоминают ту картину, которую можно было бы ожидать на основании такой модели.

Однако нас интересует вопрос о генерации постоянного поля, а не проблема вековых изменений. Уравнения Эльзассера не дают доказательства возможности генерации постоянного поля. Эльзассер выдвинул предположение, что генерация магнитного поля представляет собой не стационарное явление, а нерегулярный процесс, обусловленный непрерывным изменением состояния движения.

Исходя из уравнения (5.7), Эльзассер пришел к заключению, что при соответствующем движении среды произвольное начальное поле будет возрастать в течение некоторого конечного промежутка времени. Однако этот результат можно просто получить из уравнения (5.2), положив $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\tau = - \int \frac{j^2}{\sigma} d\tau - \int \mathbf{v} \cdot [\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}] d\tau. \quad (5.9)$$

Член, стоящий слева, представляет собой скорость возрастания энергии магнитного поля. Первый член справа дает скорость превращения магнитной энергии в тепловую, а второй член — работу вещества против сил магнитного поля. При любом \mathbf{v} (изменив, если нужно, его знак), за исключением особых случаев, можно добиться такого положения, чтобы второй член приводил к увеличению энергии магнитного поля. Тогда, пропорционально увеличивая \mathbf{v} во всех точках, можно добиться, чтобы это увеличение энергии превышало джоулевы потери. Однако такое возрастание энергии магнитного поля отнюдь не означает еще генерации поля: оно может иметь место и в аксиально-симметричном случае, в котором при любом движении поле в конце концов стремится к нулю.

Теория собственных значений. Попытаемся установить возможность генерации стационарного поля следующим образом. Положим в уравнениях (5.7) $d\beta_s/dt = 0$, что соответствует стационарному полю, и заменим скорость \mathbf{v} на $\gamma^{-1}\mathbf{v}$, где γ — численный множитель. Тогда получим систему уравнений

$$\gamma\lambda_s\beta_s = \sum_r a_{rs}\beta_r, \quad (5.10)$$

напоминающую матричные уравнения теории собственных значений. Уравнения (5.10) для $s = 1, 2, \dots$ имеют нетривиальные решения β_s лишь для определенной совокупности значений γ . Таким образом, увеличив всюду скорости произвольного движения в γ раз, можно как будто получить движение, способное поддерживать постоянное поле.

Это рассуждение, на первый взгляд вполне убедительное, приводит к противоречию. Оно применимо и к случаю аксиально-симметричных полей, когда генерация постоянного поля, как известно, невозможна. Ошибка рассуждения состоит в том, что оно не доказывает действительности значений γ , а комплексные значения γ не имеют физического смысла. В обычных задачах о собственных значениях действительность γ обеспечивается условием симметрии $a_{rs} = a_{sr}$. В данном случае такое условие отсутствует; иногда наоборот, имеет место соотношение $a_{rs} = -a_{sr}$, при котором значения γ чисто мнимы. В общем же случае коэффициенты a_{rs} не являются ни симметричными, ни антисимметричными

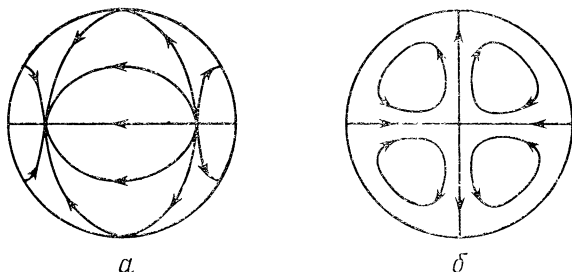
и значения γ комплексны. Пока не найдено общего доказательства возможности чисто действительных собственных значений.

§ 4. Теория Балларда

Имеются два метода доказательства теоремы существования. Один заключается в аналитическом доказательстве возможности решения, другой — в непосредственном построении решения для частного случая. Такеучи и Шимазу попытались пойти по второму пути, используя аналитические методы, однако их рассуждения в некоторых отношениях спорны. Более удовлетворительные результаты были получены Баллардом, который применял численные методы. При этом ему пришлось столкнуться с колоссальными вычислительными трудностями, которые удалось преодолеть лишь с помощью электронной вычислительной машины.

Баллард интересовался в первую очередь магнитным полем Земли и рассмотрел вопрос о том, какие движения могут происходить в ее жидком ядре. Он не рассматривал движение, обусловленное приливным трением и другими факторами, влияющими на длительность суток, а также движения, обусловленные прецессией и нутацией земной оси, поскольку эти виды движения не могут приводить к возникновению заметных магнитных полей. Он исследовал тепловую конвекцию и нашел, что для создания конвекционных токов достаточно, чтобы в ядре содержалось такое количество радиоактивного вещества, которое соизмеримо с его содержанием в железных метеоритах. Далее, вещество, выносимое за счет конвекции наружу, стремится сохранить момент количества движения вокруг оси Земли, хотя этому и препятствует градиент давления. Благодаря указанному обстоятельству конвекция приводит к тому, что вращение у поверхности ядра происходит медленнее, чем в центре. Баллард рассмотрел движение, слагающееся из неоднородного вращения и конвекции. Согласно рассмотренной им схеме конвекции, вещество поднимается к поверхности по двум противоположным радиусам в экваториальной плоскости, растекается в стороны при приближении к поверхности ядра и опускается к центру ядра на диаметре, отстоящем на 90° по долготе от диаметра, на котором происходит подъем вещества (фиг. 16).

Измерения поля на поверхности Земли показывают, что действительное движение близко к принятому в приведенной модели. Области положительного и отрицательного векового изменения магнитного поля Земли стремятся смещаться на запад, отставая на $0,2^\circ$ в год от вращения Земли; это указывает на неодинаковую скорость вращения различных слоев в ядре. Далее, в любой момент времени вблизи



Фиг. 16. Схема конвекции (по Балларду).

a — горизонтальное движение на сфере у поверхности ядра Земли;
b — движение в экваториальной плоскости.

экватора существуют две области с положительным вековым изменением магнитного поля и две области с отрицательным изменением. По-видимому, истинная конвекция в ядре Земли имеет более сложный характер, чем в модели Балларда; на основную конвекцию могут налагаться более мелкие конвекционные течения. Однако само магнитное поле может препятствовать мелким турбулентным течениям.

Но наиболее сильным доводом в пользу принятой Баллардом схемы конвекции является то обстоятельство, что она, вероятно, может объяснить генерацию постоянного поля дипольного типа. Неоднородное вращение приводит к тому, что силовые линии дипольного поля вытягиваются в азимутальном направлении, вследствие чего в обоих полушариях возникают азимутальные поля, противоположные по знаку (ср. теорию солнечных пятен в § 4 гл. 3). Действительно, ряд данных о вековых изменениях магнитного поля Земли указывает на наличие азимутального поля в ядре, которое может раз в десять превышать поле диполя. Конвекция приводит к искажению азимутального магнитного поля, причем благодаря неоднородному враще-

нию эти искажения переносятся по долготе. Наконец, магнитное поле, обусловленное этими искажениями, взаимодействует с конвективной составляющей движения, что приводит к усилению первоначального дипольного поля. В целом процесс происходит по схеме $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Графическое представление процесса затруднительно вследствие его сложности.

Таким образом, на основании общих соображений Баллард показал, что описанная выше схема может объяснить генерацию постоянного магнитного поля Земли. Однако для полного доказательства возможности генерации следовало бы произвести подробные численные расчеты. В соответствии с § 3 настоящей главы наиболее строгим был бы следующий порядок расчета. Пусть

$$\mathbf{v} = \gamma^{-1} (\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2), \quad (5.11)$$

где \mathbf{v}_1 описывает конвективное движение, \mathbf{v}_2 — неоднородное вращение, а λ — множитель, определяющий относительную роль обоих этих движений. Для любого принятого значения λ можно найти коэффициенты α_{rs} в уравнениях (5.10):

$$\alpha_{rs} = 4\pi \int (\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2) \cdot [\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{j}_s] d\tau. \quad (5.12)$$

Теперь нужно найти действительные значения γ , при которых уравнения (5.10) разрешимы. Вместо бесконечной системы уравнений можно взять n первых уравнений, одновременно сохранив лишь n первых коэффициентов β_r . Если для достаточно больших n найдено решение для действительного γ и если это значение γ мало меняется с увеличением n , можно заключить, что первоначальная бесконечная система уравнений также удовлетворяется действительным значением γ .

Однако, как обнаружил Баллард, при этом вычислительные трудности настолько велики, что применять описанный метод практически невозможно. Он нашел, что более целесообразно воспользоваться системой уравнений, представляющих собой линейные комбинации уравнений (5.10), и соответственно линейными комбинациями переменных β_r . Переменные Балларда пропорциональны значениям главных гармонических составляющих поля на определенных рас-

стояниях от центра. Однако и здесь необходимо находить действительные собственные значения γ для системы большого числа (до 110) линейных уравнений. С помощью электронной вычислительной машины эта задача была решена. Действительные значения γ нельзя было найти для всех λ ; они были найдены только для таких значений, при которых скорости неоднородного вращения значительно превышают скорости конвекции.

Таким образом, возможность генерации стационарных космических магнитных полей можно считать окончательно установленной. Разумеется, это не означает, что поля, подобные, например, магнитному полю Земли, просто представляют собой постоянные поля, поддерживаемые стационарными движениями; вековое изменение магнитного поля указывает на довольно нерегулярную конвекцию в ядре Земли. Однако такая нерегулярная конвекция, по-видимому, играет значительно меньшую роль в поддержании магнитного поля, чем регулярная. Если бы магнитное поле не могло поддерживаться регулярной конвекцией, то трудно было бы ожидать, что нерегулярная конвекция могла привести к нужному эффекту. Благодаря анализу Балларда теория генерации поля перестает быть умозрительной гипотезой.

Применение к магнитному полю Земли. Баллард нашел, что азимутальная составляющая поля, генерируемого в ядре Земли, должна быть много больше дипольного поля в ядре; а именно эти поля имеют соответственно величину порядка 400 и 4 эрстед. Такие поля не могут заметно ограничить конвекцию, однако, возможно, что они достаточны для того, чтобы воспрепятствовать возникновению развитой турбулентности, к которой может привести конвекция. Данные, полученные в результате экспериментов по течению жидкости в трубах, здесь, по-видимому, не вполне применимы, однако если все же воспользоваться критерием неустойчивости Мургатройда $R > 225M$ (см. § 5 гл. 1), то оказывается, что для возникновения турбулентного движения скорость конвекции должна составлять свыше 1 см/сек. Между тем найденные Баллардом значения скоростей имеют в 20 с лишним раз меньшую величину. Таким образом, нерегулярности в конвекционном течении обуслов-

лены, вероятно, тепловыми причинами, а не гидродинамической неустойчивостью.

Если при некотором заданном движении магнитное поле Земли остается постоянным, то можно ожидать, что при увеличении скорости движения оно будет нарастать. Действительное поле Земли, по-видимому, почти не изменилось по порядку величины за время, равное ее геологическому возрасту. Это показывает, что скорости движения имеют такую величину, которая соответствует генерации постоянного поля. Если поле станет слишком большим, то оно будет воздействовать на движение, ограничивая его, и дальнейший рост поля становится невозможным. Из механических сил, действующих в земном ядре, наибольшую величину имеет кориолисова сила, вызывающая неравномерное вращение. Баллард предположил, что поле нарастает до тех пор, пока магнитные силы, обусловленные неоднородностью вращения, не станут сравнимыми с кориолисовой силой. Скорости неравномерного вращения, вычисленные по этому критерию, имеют тот же порядок величины, что и значения, найденные по скорости смещения центров вековых изменений магнитного поля ($0,18^\circ$ в год, т. е. $0,03$ см/сек). Это обстоятельство свидетельствует о том, что теория Балларда не противоречит уравнениям движения, хотя эти уравнения не входят в нее явно.

§ 5. Механизм генерации поля

Несмотря на все достоинства теории Балларда, ее еще нельзя считать законченной. Баллард показал, что при некоторых обстоятельствах возможна генерация постоянного магнитного поля. При других обстоятельствах движение может привести к усиленному превращению энергии магнитного поля в теплоту или же просто к уменьшению энергии магнитного поля. Нужно обосновать, почему при встречающихся в природе движениях магнитное поле обязательно будет сохраняться, а не исчезать. Некоторые соображения по этому вопросу были высказаны Паркером [9, 10].

Паркер рассматривал весьма нерегулярное движение, обусловленное тепловой конвекцией в земном ядре, налагающееся на неоднородное вращение. Как и Баллард (а еще ранее Эльзассер), Паркер принимает, что вследствие неодно-

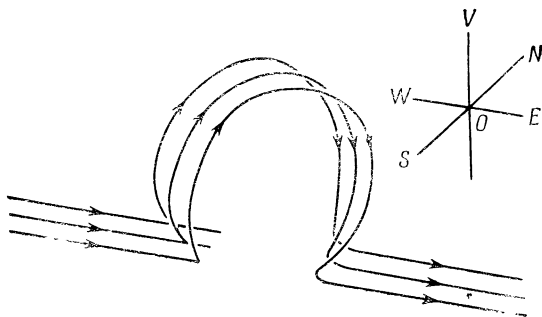
родности вращения силовые линии поля магнитного диполя растягиваются в азимутальном направлении, создавая азимутальное магнитное поле. Однако Паркер иначе подходит к рассмотрению взаимодействия конвективного движения с азимутальным полем. При тепловой конвекции вещество поднимается вблизи вертикальной оси конвективной ячейки; у основания ячейки оно стекает по горизонтали к оси, а у вершины ячейки растекается горизонтально в стороны. Паркер обратил внимание на то, что кориолисовы силы, действующие на горизонтально движущееся вещество, должны вызвать завихрение, как и в обычных циклонах. Следовательно, вещество, поднимающееся по конвективной ячейке, не просто поднимает силовые линии азимутального поля, но и закручивает их, создавая составляющую в направлении север—юг. Таким образом создаются петли магнитного поля, которые, вообще говоря, усиливают первоначальное дипольное поле (фиг. 17). Получается очень простой механизм усиления поля.

Опускающееся вещество создает петли магнитного поля, имеющие направление, обратное тому, которое необходимо для усиления поля. По-видимому, можно считать, что эти петли оказывают менее существенное влияние, чем петли, создаваемые поднимающимися массами. Действительно, опускающиеся петли находятся на большей глубине, чем поднимающиеся, вследствие чего они должны затухать до того, как успеют продиффундировать к наружной части ядра, где создается основное азимутальное магнитное поле. Однако такой аргумент не вполне убедителен; очевидно, этот вопрос необходимо рассмотреть более подробно. Паркер не проводил подобного рассмотрения, ограничившись математическим анализом следствий из принятой схемы. Но сама предложенная им схема заслуживает более глубокого анализа.

Паркер попытался объяснить аналогичным путем магнитное поле Солнца. По его представлению, поле Солнца сосредоточено в основном в зоне конвекции, находящейся непосредственно под поверхностью Солнца; на малых широтах оно в основном является азимутальным, а на больших напоминает поле диполя. Предполагается, что на малых широтах направление поля у самой поверхности противоположно его направлению на большей глубине, в зоне кон-

векции. Во время цикла солнечной деятельности поле у поверхности перемещается к экватору, поле в глубине — от экватора. Поле у поверхности, достигая экватора, вызывает слабое глубинное поле в следующем цикле солнечной деятельности; аналогично, поле в глубине, достигнув средних широт, вызывает поле у поверхности в следующем цикле.

Как и при рассмотрении магнитного поля Земли, поддержание и перемещение магнитных полей объясняются



Фиг. 17. Схема возмущения (по Паркеру).

Силловые линии, приподнятые в северном полушарии, слева поворачиваются вперед (на юг), а справа — назад (на север). Линии $O\ V$, $E\ W$ и $N\ S$ показывают соответственно вертикаль и направления восток—запад и север—юг.

неоднородным вращением и завихрениями в поднимающемся веществе. Предполагается, что сначала силовые линии поля представляют собой петли в экваториальной плоскости. Неоднородность вращения приводит к растяжению вертикальных участков петель и возникновению азимутального поля; завихрения в поднимающемся веществе закручивают азимутальное поле и создают поле в меридиональных плоскостях. Последнее поле, которое в конечном итоге обусловлено первоначальным вертикальным полем, имеет противоположное направление по обе стороны магнитной петли; таким образом, оно усиливает поле в петле с одной стороны (более близкой к экватору для петель, находящихся у поверхности) и ослабляет с другой. Следовательно, петля у поверхности поддерживается за счет

генерации и одновременно перемещается к экватору; на большей глубине петля, наоборот, движется от экватора.

При более детальном исследовании Паркер предполагает, что поле является периодическим по долготе. Действительное поле Солнца не обнаруживает такой периодической структуры. По этой причине теорию Паркера в существующем ее виде нельзя считать удовлетворительной, однако она заслуживает более подробного исследования.

§ 6. Турбулентные движения

Рассмотрим теперь взаимодействие магнитного поля с турбулентным движением. Этот вопрос обсуждался многократно в связи с возможным существованием межзвездных магнитных полей. Основная идея заключается в том, что турбулентное движение стремится растянуть трубки силовых линий и тем самым приводит к увеличению напряженности магнитного поля. Если силовые линии вморожены в вещество, то (см. § 3 гл. 1) величина $H/\rho dl$ постоянна при движении (здесь dl — элемент длины силовой линии, проходящей через рассматриваемую точку).

1. О влиянии сжимаемости. Из сказанного выше следует, что изменения плотности могут влиять на магнитное поле. Как показал Вален, это обстоятельство может привести к тому, что даже сильное общее магнитное поле Солнца почти не будет проявляться на поверхности. Вследствие конвекции вещество во внешних слоях непрерывно перемещается вверх и вниз. Таким образом, вещество, находящееся в настоящий момент на поверхности Солнца, было до этого на некоторой глубине. Но при подъеме на поверхность магнитное поле H изменяется пропорционально ρdl . Следовательно, если при этом не происходит сильного растяжения магнитных силовых линий, то подъем должен приводить к значительному ослаблению магнитного поля вследствие сильного уменьшения плотности. В рассуждениях Валена не учитывается то обстоятельство, что вследствие конечной проводимости вещества будет наблюдаться некоторое просачивание силовых линий на поверхность; кроме того, подъем силовых линий может сопровождаться продольным перемещением вещества вдоль них, эквивалентным существенному изменению dl . Однако соображения Валена

представляют интерес в том отношении, что выявляют возможное влияние плотности на магнитное поле.

Другой случай влияния изменения плотности был исследован Гуревичем и другими авторами. Они рассмотрели изменение поля при сжатии межзвездного облака. Пусть облако сжимается равномерно и R — его радиус в данный момент времени. Тогда $\rho \sim R^{-3}$, $dl \sim R$ и, следовательно, $H \sim R^{-2}$. Таким образом, сжатие облака может привести к значительному возрастанию магнитного поля. Это позволяет объяснить магнитные поля звезд как результат сильного возрастания первоначально ничтожных полей газовых облаков в процессе их конденсации.

Приведенные примеры показывают, что изменения плотности могут играть существенную роль. Тем не менее в дальнейшем для простоты мы будем рассматривать однородную несжимаемую жидкость. В тех явлениях, где можно пренебрегать влиянием гравитационных сил, свойства такой жидкости во многих отношениях близки к свойствам межзвездного газа. Если не учитывать рассеяния энергии, обусловленного конечной проводимостью, то в такой жидкости $H \sim dl$. Можно предположить, что беспорядочное турбулентное движение, как правило, растягивает силовые линии, т. е. приводит к увеличению магнитного поля.

2. Турбулентная диссипация. Турбулентность увеличивает также скорость диссипации магнитного поля. Рассмотрим, например, следуя Свиту, поле в меридиональной плоскости тела, подобного Солнцу. Пусть поле подвержено влиянию случайных движений, также происходящих в меридиональной плоскости. Движение приводит к растяжению силовых линий и, поскольку занимаемый ими объем остается неизменным, увеличивает густоту этих линий. Если \bar{H} — среднее поле, а L_0 — среднее расстояние между силовыми линиями в меридиональной плоскости, то условие сохранения магнитного потока для замороженного поля сводится, грубо говоря, к тому, что произведение $\bar{H}L_0$ должно оставаться постоянным. Это означает, что магнитная энергия увеличивается пропорционально $1/L_0^2$. Но $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$, а $\text{rot } \mathbf{H}$ пропорционален \bar{H}/L_0 . Отсюда следует, что диссипация

j^2/σ в единице объема растет пропорционально $1/L_0^4$. Таким образом, турбулентность увеличивает диссипацию энергии магнитного поля в большей мере, чем самое энергию, так что время затухания магнитного поля уменьшается.

Эльзассер полагает, что вследствие наличия турбулентности расчеты времени затухания, основанные на величине обычной проводимости, вообще бессмысленны. Во многих задачах, связанных с исследованиями атмосферы, обычный коэффициент диффузии приходится заменять «коэффициентом турбулентной диффузии», имеющим величину порядка LV , где L — средний свободный пробег элемента турбулентности, а V — средняя скорость турбулентности. Эльзассер предположил, что аналогично и в уравнении для магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{H}$$

следует заменить коэффициент диффузии магнитного поля $\eta = (4\pi\mu\sigma)^{-1}$ на коэффициент турбулентной диффузии порядка LV . Поскольку L имеет, по-видимому, большую величину, это приводит к чрезвычайному ускорению затухания поля.

Но Эльзассер, вероятно, переоценил скорость затухания поля. В статистической теории диффузии предполагается, что турбулентный элемент переносит с собой диффундирующую величину из одной точки в другую и оставляет ее на новом месте. Но магнитное поле может в свою очередь воздействовать на движение благодаря магнитным натяжениям: силовые линии стремятся выпрямиться и помешать диффузии, вызываемой турбулентностью. Поэтому можно ожидать, что скорость затухания поля увеличится за счет турбулентности лишь в той мере, в какой увеличится обычная диссипация, обусловленная искажением магнитных силовых линий.

В случае магнитного поля Земли турбулентность, вероятно, не может привести к существенному увеличению скорости затухания поля, так как наличие поля ограничивает турбулентность. Для поля Солнца и межзвездных полей этот эффект может оказаться значительно более существенным.

§ 7. Равномерное распределение энергии

Если пренебречь силой тяжести, то уравнение (1.10), определяющее изменение поля, принимает для однородной жидкости следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \eta \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (5.13)$$

а уравнение движения записывается так:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} - \mu \mathbf{H} \cdot \text{grad} \left(\frac{\mathbf{H}}{4\pi\rho} \right) = - \text{grad} \tilde{\omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}; \quad (5.14)$$

здесь
$$\rho \tilde{\omega} = p + \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

Некоторые авторы на основании этих уравнений делали вывод, что турбулентность в конце концов приводит к приблизительно равномерному распределению энергии между турбулентным движением и обусловленным им чрезвычайно запутанным «турбулентным» магнитным полем. В своих соображениях они исходят из того, что турбулентное движение, как это следует из уравнения (5.13), стремится натянуть магнитные силовые линии и, следовательно, увеличить магнитную энергию поля; последнее обстоятельство уже отмечалось выше. Магнитная энергия не может возрастать беспредельно; когда магнитное поле становится слишком большим, натяжение вдоль силовых линий препятствует их дальнейшему растяжению. В окончательно установившемся стационарном состоянии силы инерции, описываемые вторым членом в левой части уравнения (5.14), должны быть сравнимы с силами натяжения вдоль силовых линий, описываемыми третьим членом. Таким образом, v^2 имеет тот же порядок величины, что и $\mu H^2/4\pi\rho$, т. е. механическая энергия $\rho v^2/2$ единицы объема сравнима с магнитной энергией $\mu H^2/8\pi$. Следовательно, энергия распределяется приблизительно поровну между турбулентным движением и магнитным полем.

Эльзассер подтверждал это заключение следующим доказательством. Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mu^{1/2} \mathbf{H} (4 \pi \rho)^{-1/2} &= \mathbf{P}, \\ \mathbf{v} - \mu^{1/2} \mathbf{H} (4 \pi \rho)^{-1/2} &= \mathbf{Q}, \\ v_1 &= \frac{v + \eta}{2}, \\ v_2 &= \frac{v - \eta}{2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Тогда уравнения (5.13) и (5.14) можно привести к виду

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\mathbf{Q} \cdot \text{grad}) \mathbf{P} = - \text{grad } \tilde{\omega} + v_1 \nabla^2 \mathbf{P} + v_2 \nabla^2 \mathbf{Q}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + (\mathbf{P} \cdot \text{grad}) \mathbf{Q} = - \text{grad } \tilde{\omega} + v_2 \nabla^2 \mathbf{P} + v_1 \nabla^2 \mathbf{Q}, \quad (5.17)$$

Эти уравнения очень похожи на уравнение движения в отсутствие магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = - \text{grad } \tilde{\omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (5.18)$$

где теперь $\tilde{\omega} = p/\rho$. В уравнениях (5.16) и (5.17) переменные \mathbf{P} и \mathbf{Q} играют ту же роль, что скорость \mathbf{v} в уравнении (5.18). Из определений \mathbf{P} и \mathbf{Q} можно заключить, что величина $\mathbf{H}/\sqrt{\mu/4\pi\rho}$ аналогична величине \mathbf{v} и играет роль скорости. Но если \mathbf{v} и $\mathbf{H}/\sqrt{\mu/4\pi\rho}$ имеют величину одного порядка, то это и означает, что энергия распределена поровну между механическим движением и магнитным полем.

Относительно приведенного доказательства следует сделать несколько критических замечаний. Прежде всего в нем считается само собой разумеющимся, что магнитная энергия непрерывно возрастает, пока не будет достигнуто конечное стационарное состояние. Конечно, турбулентность вначале стремится увеличить энергию первоначально регулярного магнитного поля, но это возможно лишь за счет расщепления поля на небольшие участки, в которых поле может быстро затухнуть вследствие конечной проводимости. Таким образом, поле может существовать длительное

время только за счет какого-то механизма генерации большого масштаба, определяемого регулярным «крупномасштабным» движением. Такое крупномасштабное поле, генерируемое за счет некоторого механизма, может влиять на распределение энергии.

Далее, из доказательства следует, что обе переменные \mathbf{P} и \mathbf{Q} ведут себя аналогично скорости \mathbf{v} при обычной гидродинамической турбулентности, но на основании этого нельзя ничего сказать об относительной величине отдельных слагаемых \mathbf{v} и $\mu^{1/2} \mathbf{H} (4\pi \rho)^{-1/2}$, входящих в \mathbf{P} и \mathbf{Q} . Согласно доказательству, приведенному в начале параграфа, возрастание магнитного поля должно прекратиться, когда энергия распределится приблизительно поровну между движением и магнитным полем, однако из него не вытекает, что увеличение поля не может прекратиться раньше. Возможно, что окончательная величина магнитной энергии зависит не только от энергии турбулентного движения, но, например, и от безразмерного параметра ν/η . В этом отношении доказательство Эльзассера мало что добавляет к приведенному ранее.

В заключение следует добавить, что, в какой бы мере ни был справедлив закон равномерного распределения энергии, к вращающимся системам его следует применять с осторожностью. Так, например, согласно теории Балларда (см. § 4 настоящей главы), наиболее существенными из инерционных сил являются кориолисовы силы. Поэтому сравнение инерционных сил с магнитными не обязательно должно привести к заключению о равномерном распределении энергии.

1. Аналогия с вихрем скорости. Бэтчелор [1] выдвинул предположение о том, что в рассматриваемом вопросе закон равномерного распределения энергии имеет весьма ограниченное применение. Его соображения основаны на аналогии между уравнением (5.13) и уравнением, которому удовлетворяет вихрь скорости $\boldsymbol{\omega}$ в отсутствие магнитного поля:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (5.19)$$

Поскольку как вихрь скорости $\boldsymbol{\omega}$, так и вектор \mathbf{H} имеют нулевую дивергенцию, Бэтчелор полагает, что магнитное

поле по своему характеру близко к полю вихрей скорости в обычной гидродинамике, и на основании этого делает некоторые выводы относительно магнитного поля.

Прежде всего Бэтчелор рассматривает вопрос о том, возможно ли спонтанное нарастание магнитного поля в проводящей жидкости, находящейся в турбулентном движении. Он предполагает существование некоторого слабого первоначального поля, настолько малого, что оно почти не влияет на движение, и рассматривает вопрос о том, может ли движение усилить это поле. Движение считается квазистационарным, как это часто делают в теории турбулентности, причем энергия движения вещества непрерывно поступает в большие вихри, вырождается в энергию малых вихрей и, наконец, рассеивается за счет вязкости.

Исходя из аналогии между уравнениями (5.13) и (5.19), Бэтчелор полагает, что начальное магнитное поле и силовые линии быстро примут вид, подобный полю вихрей и линиям вихрей. Это означает, что движение вещества должно приводить к одинаковому увеличению магнитного поля и вихря скорости. В то же время диссипативные эффекты приводят к уменьшению магнитного поля и поля вихрей, причем скорости этого уменьшения пропорциональны соответственно η и ν . Возрастание вихря скоростей, обусловленное движением вещества, компенсируется диссипацией; отсюда следует, что магнитное поле может возрастать лишь в том случае, когда его диссипация меньше, т. е. при $\eta < \nu$. Это условие не удовлетворяется ни на Земле, ни на звездах, однако, возможно, что оно выполняется в межзвездных облаках вследствие их малой плотности ($\nu \sim 1/\rho$).

Приведенное рассуждение не совсем безупречно. В нем заранее предполагается, что магнитное поле быстро принимает форму, подобную полю вихрей, а затем доказывается, что при $\eta > \nu$ диссипация магнитного поля очень велика. Но это, очевидно, означает лишь несправедливость нашего предположения о том, что магнитное поле принимает форму, аналогичную полю вихрей. Указанное предположение верно для больших вихрей и больших магнитных петель, для которых влияние диссипации невелико, но несправедливо для малых вихрей и петель, так как при $\eta > \nu$ малые магнитные петли исчезают быстрее, чем малые вихри. Таким образом, приведенные рассуждения Бэтче-

лора, вероятно, допускают возрастание магнитной энергии благодаря большим магнитным петлям, несмотря на то, что «спектры» магнитного поля и вихря скорости различны на «коротковолновом» конце.

Бэтчелор рассмотрел также вопрос о равномерном распределении энергии при возникновении турбулентного магнитного поля; при этом он снова использовал аналогию между вихрем скоростей и магнитным полем. При обычной турбулентности большие вихри приводят в основном к увеличению кинетической энергии движения, а малые вихри — к увеличению энергии вихрей. Соответственно Бэтчелор предположил, что магнитная энергия турбулентного поля обусловлена главным образом малыми петлями силовых линий. Как уже указывалось выше, механические эффекты ограничивают рост магнитного поля в том случае, когда энергия движения становится приблизительно равной энергии поля. На основании этого Бэтчелор предполагает, что энергия должна распределяться поровну между коротковолновыми составляющими магнитного поля и турбулентного движения. Но распределение энергии между крупномасштабной и мелкомасштабной частями магнитного поля подобно распределению энергии вихрей, а не энергии движения, так что энергия крупномасштабной части магнитного поля значительно меньше энергии соответствующей составляющей движения. Чандрасекар [4, 5] провел подробный математический анализ, также основанный главным образом на уравнении (5.19); этот анализ в целом подтверждает выводы Бэтчелора.

Однако и эти соображения не лишены недостатков. Поле вихрей в уравнении (5.19) представляет собой поле при отсутствии магнитного поля. Поэтому для существования полной аналогии между уравнениями (5.19) и (5.13) необходимо, чтобы поле скоростей в (5.13) мало искажалось магнитным полем, а это далеко не всегда имеет место. Как показал Вален, магнитная жесткость, обусловленная достаточно сильными крупномасштабными полями, сильно ослабляет мелкомасштабную турбулентность; вихревые движения переходят при этом в малые колебания силовых линий. Таким образом, можно представить себе поле, увеличивающееся за счет взаимодействия с турбулентным движением и подавляющее по мере своего роста мелкие турбулентности,

которые приводили к образованию мелких магнитных петель. Отсюда следует, что рост магнитной энергии обуславливается лишь крупными петлями магнитного поля. Действительно, Шлютер и Бирман [11] построили теорию межзвездных магнитных полей, в которой равномерное распределение энергии между магнитным полем и турбулентностями вначале устанавливается в коротковолновой части спектра, а затем постепенно распространяется в область больших длин волн.

2. Выводы. Из сказанного выше видно, в каком неудовлетворительном состоянии находится пока теория магнитогидродинамической турбулентности. Почти каждое соображение, подтверждающее или опровергающее гипотезу о равномерном распределении энергии между магнитным полем и турбулентностями, не выдерживает строгой критики.

Сейчас большинство исследователей считает, что в том или ином смысле равномерное распределение энергии имеет место. Возможно, это объясняется не столько убедительностью теории о равномерном распределении энергии, сколько тем, что для объяснения данных наблюдений поляризации света звезд и для теории космических лучей необходимо наличие межзвездного магнитного поля. Однако в настоящее время не существует достаточно полного исследования, аналогичного работе Балларда по генерации постоянного поля, которое показало бы, что турбулентное движение способно обеспечить длительное существование поля.

Ясно, что такое положение вещей нельзя считать удовлетворительным. Очевидно, необходим более глубокий подход к этой проблеме. Первые шаги в этом направлении сделаны, по-видимому, в работе Чандрасекара [4, 5], который получил соотношение, аналогичное закону равномерного распределения энергии. Поскольку автор в силу своих предположений ограничивается умеренными и малыми длинами волн, мы не можем утверждать, что его работа противоречит какой-либо из изложенных выше теорий. Следует ожидать появления новых работ, которые четко разграничили бы эти различные подходы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K., Proc. Roy. Soc., **201A**, 405 (1950). (Имеется перевод: ПСФ, вып. 2, ИЛ, 1954.)
2. Bullard E. C., Proc. Roy. Soc., **197A**, 433 (1949).
3. Bullard E. C., Gellman H., Phil. Trans. Roy. Soc., **247**, 213 (1954).
4. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc., **204A**, 435 (1950); **207A**, 301 (1951). (Имеется перевод: ПСФ, вып. 2, ИЛ, 1954.)
5. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc., **233A**, 322, 330 (1955). (Имеется перевод: ПСФ, вып. 7, ИЛ, 1957.)
6. Cowling T. G., Month. Not. Roy. Astr. Soc., **94**, 39 (1934).
7. Elsasser W. M., Phys. Rev., **69**, 106; **70**, 202 (1946); **72**, 821 (1947); **79**, 183 (1950).
8. Elsasser W. M., Univ. Utah Repts. Earth's Magnetism and Magnetohydrodynamics, No. 7, 1954.
9. Parker E. N., Univ. Utah Repts. Earth's Magnetism and Magnetohydrodynamics, No. 3 and 6, 1954.
10. Parker E. N., Astrophys. Journ., **122**, 293 (1955).
11. Schlüter A., Biermann L., Zs. Naturforsch., **5a**, 237 (1950). (Имеется перевод: ПСФ, вып. 2, ИЛ, 1954.)

ИОНИЗОВАННЫЕ ГАЗЫ

§ 1. Влияние молекулярной структуры

В этой главе мы рассмотрим кратко некоторые существенные для магнитной гидродинамики свойства ионизованных газов, зависящие от их молекулярной структуры. Более подробное описание свойств полностью ионизованных газов читатель найдет в монографии Спитцера [4].

Мы рассмотрим два различных эффекта. Первый из них состоит в том, что в ионизованном газе возможны электрические токи, обусловленные относительной диффузией электронов и положительных ионов, которая вызывается причинами, имеющими неэлектрическое происхождение. Так, например, при расширении местного сгущения под действием собственного давления электроны, обладающие большими тепловыми скоростями, стремятся опередить ионы, что приводит к относительной диффузии. Эффекты такого рода имеют место и при отсутствии магнитного поля.

Второй эффект полностью определяется магнитным полем. В однородном магнитном поле \mathbf{H} частица с массой m и зарядом e движется между соударениями по спирали, обвивающей силовую линию. Движение вдоль силовой линии является равномерным; проекция движения на плоскость, перпендикулярную силовым линиям, представляет собой равномерное вращение с угловой скоростью $\mu e H / m$. При тепловых скоростях неоднородность магнитного поля или же наличие не слишком большого электрического поля не меняет существенно этой картины: на спиральное движение вокруг силовых линий налагается медленный дрейф перпендикулярно магнитному полю. В молекулярном масштабе стремление частиц двигаться по спирали вокруг силовых линий аналогично стремлению боль-

ших масс проводящей жидкости двигаться вдоль силовых линий. Если плотность газа столь мала, что частица успевает описать между последовательными соударениями около оборота или больше, мы будем говорить о частицах «со спиральным пробегом».

Для частиц со спиральным пробегом наличие поля приводит к тому, что среднее смещение за время свободного пробега в направлении, перпендикулярном магнитному полю, сильно уменьшается. Поэтому следует ожидать, что магнитное поле будет уменьшать и электропроводность в направлении, перпендикулярном полю. Действительно, оказывается, что в некотором смысле это предположение справедливо. Но, поскольку такое уменьшение электропроводности обусловлено тесной связью частиц с силовыми линиями, трудно предполагать, что в полностью ионизованном газе этот эффект приведет к увеличению просачивания магнитных силовых линий сквозь вещество, как этого можно было бы ожидать на основании уменьшения σ в соответствии с уравнением (1.10). Далее, джоулевы потери обусловлены соударениями между частицами, так что уменьшение проводимости ионизованного газа вряд ли приведет к их увеличению. Очевидно, в этом случае проводимость играет совсем иную роль, чем в обычных физических процессах.

§ 2. Токи в полностью ионизованном газе

Изложим сначала грубую теорию электрических токов в полностью ионизованном газе. Пусть газ состоит лишь из электронов с массой m_e и зарядом $-e$ и положительных ионов с массой m_i и зарядом $+e$. С большой степенью точности газ можно считать электрически нейтральным, так что число ионов и электронов в единице объема почти одинаково; обозначим его через n .

Будем рассматривать электроны и ионы как два независимых движущихся газа. Поскольку отношение масс m_i/m_e очень велико, скорость всего вещества в целом можно считать равной скорости ионного газа. Пусть электронный газ обладает скоростью \mathbf{V} по отношению к ионному. Тогда плотность тока \mathbf{j} равна

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{V}. \quad (6.1)$$

Взаимодействие электронного газа с ионным в процессе соударений заменим некоторой усредненной непрерывно действующей силой. Пусть в среднем электроны при каждом соударении теряют импульс, равный их среднему импульсу $m_e \mathbf{V}$ относительно ионного газа. Пусть, далее, среднее время между последовательными соударениями электронов с ионами равно τ . Тогда полный импульс, теряемый электронами в единице объема и за единицу времени вследствие соударений с ионами, равен $nm_e \mathbf{V} \tau^{-1}$. Можно считать, что на электронный газ действует тормозящая сила с объемной плотностью — $nm_e \mathbf{V} \tau^{-1}$.

Рассмотрим теперь уравнение движения электронного газа. На него действуют следующие объемные силы:

а) градиент электронного давления — $\text{grad } p_e$;

б) сила тяжести $nm_e \mathbf{g}$, которой можно пренебречь ввиду малости электронной массы;

в) электрическая сила — $ne(\mathbf{E}' + \mu [\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}])$, где \mathbf{E}' — напряженность электрического поля $\mathbf{E} + \mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]$ в системе координат, движущейся со скоростью \mathbf{v} вместе с веществом;

г) тормозящая сила, обусловленная соударениями.

Этими силами определяется ускорение электронов. Но, поскольку масса электронов пренебрежимо мала, сумма этих сил должна быть равна нулю:

$$0 = -\text{grad } p_e - ne(\mathbf{E}' + \mu [\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}]) - nm_e \mathbf{V} \tau^{-1},$$

или, учитывая (6.1),

$$\text{grad } p_e + ne \mathbf{E}' = \mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] + \frac{m_e}{e\tau} \mathbf{j}. \quad (6.2)$$

Если на газ не действует магнитное поле, а градиент давления равен нулю, то соотношение (6.2) принимает вид $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$, где σ представляет собой проводимость в отсутствие магнитного поля и определяется соотношением

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_e}. \quad (6.3)$$

Вводя величину σ в (6.2), получим

$$\sigma \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{ne} \text{grad } p_e \right) = \mathbf{j} + \frac{\mu e \tau}{m_e} [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]. \quad (6.4)$$

Диссипацию энергии электрического тока можно истолковать как работу против силы торможения — $nm_e \mathbf{V} \tau^{-1}$, которая затрачивается для поддержания постоянной относительной скорости \mathbf{V} . Отсюда следует, что потери энергии тока в единице объема равны $nm_e \mathbf{V}^2 \tau^{-1}$. Из (6.1) и (6.4) видно, что эта величина равна \mathbf{j}^2/σ , как и при отсутствии магнитного поля.

Уравнение тока. Как видно из формулы (6.4), градиент давления электронного газа эквивалентен некоторому избыточному электрическому полю $\mathbf{E}'' = (1/ne) \text{grad } p_e$. Это эквивалентное электрическое поле и описывает влияние диффузии, обусловленной причинами неэлектрического происхождения.

Второй член в правой части формулы (6.4) описывает влияние магнитного поля на ток. По порядку величины он отличается множителем $\omega\tau$ от первого члена, где $\omega = \mu e H/m_e$ — угловая частота обращения электронов по спирали в магнитном поле. Для частиц со спиральным пробегом частота обращения по спирали велика по сравнению с частотой соударений $1/\tau$, т. е. произведение $\omega\tau$ велико. Таким образом, из (6.4) явно следует, что для газа со спиральным пробегом электронов магнитное поле весьма сильно влияет на ток.

Порядок величины отдельных членов в (6.4) можно оценить с помощью уравнения движения газа в целом, которое в пренебрежении вязкостью имеет следующий вид:

$$e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + e \mathbf{g} + \mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]. \quad (6.5)$$

Если силой тяжести можно пренебречь, а инерциальные и электромагнитные силы играют одинаковую роль, то из уравнения (6.5) следует, что произведение $\mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$ имеет величину порядка $\text{grad } p$ или (так как $p = 2p_e$) порядка $\text{grad } p_e$. Таким образом, в формуле (6.4) второй член справа имеет тот же порядок величины, что и второй член слева. При $\omega\tau \ll 1$ эти члены должны быть много меньше \mathbf{j} и $\sigma \mathbf{E}'$. Следовательно, в этом случае уравнение (6.4) мало отличается от обычного уравнения $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$. Если же $\omega\tau \gg 1$, то, наоборот, \mathbf{j} значительно меньше $\text{grad } p_e$ и $\mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$; член $\sigma \mathbf{E}'$ обычно того же порядка, что и два остальных.

Таким образом, для электронов со спиральным пробегом эквивалентное электрическое поле \mathbf{E}'' обычно имеет величину того же порядка, что и \mathbf{E}' , и пренебрегать им нельзя.

Сильных отклонений от соотношения $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$ следует ожидать лишь для электронов со спиральным пробегом; поэтому в дальнейшем мы ограничимся лишь случаем $\omega\tau \gg 1$. Это условие справедливо для весьма разреженного газа, как, например, при вакуумных разрядах, а также в верхних слоях земной или солнечной атмосферы и для межзвездного газа.

§ 3. Проводимость

Формулу (6.4) можно преобразовать различными способами. Вводя эквивалентное электрическое поле \mathbf{E}'' и частоту обращения по спирали ω , ее можно записать в виде

$$\sigma(\mathbf{E}' + \mathbf{E}'') = \mathbf{j} + \frac{\omega\tau}{H} [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]. \quad (6.6)$$

Если «полное электрическое поле» $\mathbf{E}' + \mathbf{E}''$ параллельно магнитному полю, то

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E}' + \mathbf{E}'')$$

и

$$[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] = 0.$$

Следовательно, магнитное поле не влияет на проводимость вдоль силовых линий магнитного поля.

Если же поле $\mathbf{E}' + \mathbf{E}''$ перпендикулярно магнитному полю, то уравнение (6.6) можно решить относительно тока

$$\mathbf{j}(1 + \omega^2\tau^2) = \sigma \left(\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' - \frac{\omega\tau}{H} [(\mathbf{E}' + \mathbf{E}'') \cdot \mathbf{H}] \right). \quad (6.7)$$

Таким образом, магнитное поле ослабляет ток в направлении $\mathbf{E}' + \mathbf{E}''$ в отношении $1/(1 + \omega^2\tau^2)$; одновременно оно создает в $\omega\tau$ раз больший ток в направлении, перпендикулярном как $\mathbf{E}' + \mathbf{E}''$, так и \mathbf{H} . Отсюда видно, что магнитное поле сильно влияет на токи, текущие перпендикулярно полю.

Уравнение (6.6) можно преобразовать иначе, подставив в него вместо $\mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$ его выражения из уравнения движения (6.5). Тогда соотношение (6.6) примет вид

$$\mathbf{j} = \sigma \left[\mathbf{E}' + \frac{1}{ne} \left(\varrho \mathbf{g} - \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \text{grad } p_i \right) \right], \quad (6.8)$$

где $p_i \equiv p - p_e$ — парциальное давление ионного газа. Введем теперь новое эквивалентное электрическое поле

$$\mathbf{E}''' = \frac{1}{ne} \left(\varrho \mathbf{g} - \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \text{grad } p_i \right); \quad (6.9)$$

тогда соотношение (6.8) примет следующий вид:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E}' + \mathbf{E}'''). \quad (6.10)$$

Таким образом, если определить $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'''$ как полное электрическое поле, то проводимость σ оказывается не зависящей от магнитного поля. Этот результат был впервые получен Шлютером [3].

Введением \mathbf{E}''' мы, конечно, не избавились от эффекта ослабления поперечных токов при наличии магнитного поля; он лишь сказывается теперь в неявной форме. Как мы уже говорили, в формуле (6.6) члены, содержащие \mathbf{E}' , \mathbf{E}'' и $\mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$, в общем случае сравнимы между собой по величине при $\omega \tau \gtrsim 1$, так что \mathbf{j} большей частью является величиной порядка $\sigma \mathbf{E}' / \omega \tau$. Это означает, что в соотношении (6.10) члены $\sigma \mathbf{E}'$ и $\sigma \mathbf{E}'''$ в правой части значительно больше их суммы. Уменьшение электрического тока при наличии магнитного поля обеспечивается введением полного электрического поля $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'''$, которое много меньше обычного поля \mathbf{E}' .

Тем не менее формула (6.10) играет в ряде физических явлений не только формальную роль. Так, например, в разрядной трубке физически существенную роль играет не все электрическое поле, которое может иметь большую поперечную составляющую, а лишь его составляющая вдоль трубки, т. е. параллельная току. Но если E'_j и E''_j есть составляющие полей \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' вдоль тока, то из (6.6) получаем

$$j = \sigma (E'_j + E''_j). \quad (6.11)$$

Сопоставляя это соотношение с формулой (6.10), мы видим, что $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'''$ представляет собой составляющую полного электрического поля $\mathbf{E}' + \mathbf{E}''$, параллельную току.

Если определить проводимость как отношение тока лишь к этой составляющей, то она будет равна σ , как и в отсутствие магнитного поля.

Как следует из приведенных выше соображений, а также из того, что джоулевы потери в рассматриваемом случае по-прежнему определяются выражением j^2/σ , мы вообще не можем говорить об уменьшении проводимости в магнитном поле, не уточнив, что понимается под электрическим полем и под проводимостью и в каком смысле следует понимать ее уменьшение. Лучше всего пользоваться каждый раз соотношениями (6.6) и (6.8) и не прибегать к рискованным аналогиям с обычными представлениями о проводимости.

§ 4. Частично ионизованные газы

Рассмотрим теперь частично ионизованный газ. В единице объема такого газа, помимо n положительных ионов и электронов, содержится еще n_a нейтральных атомов, массу которых мы будем считать совпадающей с массой m_i положительных ионов. Скорости ионного и электронного газов положим равными соответственно $\mathbf{v} + \mathbf{V}_i$ и $\mathbf{v} + \mathbf{V}_i + \mathbf{V}$, где \mathbf{v} — скорость вещества как целого. Если пренебречь массой электронов, то импульс единицы объема будет равен $(n + n_a)m_i\mathbf{v}$; это означает, что скорость нейтрального газа равна $\mathbf{v} - n\mathbf{V}_i/n_a$.

Наряду с временем τ между соударениями электронов с ионами теперь следует ввести также времена τ_e и τ_i между соударениями электронов и ионов с нейтральными атомами. В уравнение движения электронов следует ввести силу торможения, обусловленную соударением электронов с нейтральными атомами.

Если при каждом соударении электроны полностью теряют свою скорость относительно нейтрального газа, то соответствующая сила торможения равна $-nm_e\{\mathbf{V} + \mathbf{V}_i(1 + n/n_a)\}\tau_e^{-1}$. Таким образом, уравнение движения электронов имеет вид

$$0 = -\text{grad } p_e - ne\{\mathbf{E}' + \mu[(\mathbf{V} + \mathbf{V}_i) \cdot \mathbf{H}]\} - nm_e\mathbf{V}\tau^{-1} - \\ - nm_e\left\{\mathbf{V} + \mathbf{V}_i\left(1 + \frac{n}{n_a}\right)\right\}\tau_e^{-1}. \quad (6.12)$$

Как и прежде, $\mathbf{j} = -ne \mathbf{V}$. Введем по аналогии

$$\mathbf{j}_i = ne \mathbf{V}_i; \quad (6.13)$$

очевидно, \mathbf{j}_i есть плотность тока, обусловленная движением ионов относительно вещества в целом (она компенсируется составляющей \mathbf{V}_i скорости электронов). Уравнение (6.12) преобразуется к виду

$$0 = -\text{grad } p_e - ne \mathbf{E}' + \mu [(\mathbf{j} - \mathbf{j}_i) \cdot \mathbf{H}] + \mu (\omega\tau)^{-1} H \mathbf{j} + \\ + \mu (\omega\tau_e)^{-1} H \left\{ \mathbf{j} - \mathbf{j}_i \left(1 + \frac{n}{n_a} \right) \right\}, \quad (6.14)$$

где $\omega = \mu eH/m_e$, как и раньше, означает частоту обращения электронов по спиральям. Для краткости положим

$$\frac{1}{\omega\tau} = \kappa, \quad \frac{1}{\omega\tau_e} = \kappa_e; \quad (6.15)$$

для электронов со спиральным пробегом κ и κ_e малы. Долю неионизованных атомов обозначим через f , так что

$$1 + \frac{n}{n_a} = \frac{1}{f}. \quad (6.16)$$

Тогда уравнение (6.14) примет вид

$$0 = -\text{grad } p_e - ne \mathbf{E}' + \mu [(\mathbf{j} - \mathbf{j}_i) \cdot \mathbf{H}] + \\ + \mu (\kappa + \kappa_e) H \mathbf{j} - \frac{\mu\kappa_e}{f} H \mathbf{j}_i. \quad (6.17)$$

Аналогично получается уравнение движения ионного газа. Инерционный член принимается равным $\varrho_i d\mathbf{v}/dt$, так как предполагается, что скорость \mathbf{V}_i ионов относительно центра массы много меньше \mathbf{v} . Соударение с электронами обуславливает силу торможения $nm_e \mathbf{V} \tau^{-1}$, равную и противоположную соответствующей силе для электронного газа. Поскольку массы атомов и ионов одинаковы, ионы при соударениях с нейтральными атомами теряют лишь половину своей скорости $\mathbf{V}_i(1 + n/n_a)$ относительно ней-

тральных атомов. Следовательно, сила торможения равна в этом случае $1/2 nm_i \mathbf{V}_i (1 + n/n_a) \tau_i^{-1}$. Таким образом, уравнение движения для ионов имеет вид

$$\begin{aligned} \varrho_i \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & -\text{grad } p_i + \varrho_i \mathbf{g} + ne (\mathbf{E}' + \mu [\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{H}]) + \\ & + nm_e \mathbf{V} \tau^{-1} - \frac{1}{2} nm_i \mathbf{V}_i \left(1 + \frac{n}{n_a}\right) \tau_i^{-1}. \end{aligned}$$

Выразив здесь \mathbf{V} и \mathbf{V}_i через \mathbf{j} и \mathbf{j}_i и положив $\varrho_i = (1 - f) \varrho$ и

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{\mu eH}{m_i}, \\ \kappa_i &= \frac{1}{2\omega_i \tau_i}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

получим

$$\begin{aligned} (1 - f) \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & -\text{grad } p_i + (1 - f) \varrho \mathbf{g} + ne \mathbf{E}' + \mu [\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{H}] - \\ & - \mu \kappa H \mathbf{j} - \mu \kappa_i f^{-1} H \mathbf{j}_i. \end{aligned} \quad (6.19)$$

К уравнениям (6.17) и (6.19) следует добавить уравнение движения газа в целом

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \varrho \mathbf{g} + \mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]. \quad (6.20)$$

Чтобы понять смысл уравнений (6.17) и (6.19), сложим их, исключив тем самым \mathbf{j}_i ,

$$\begin{aligned} (1 - f) \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & -\text{grad } (p_i + p_e) + (1 - f) \varrho \mathbf{g} + \mu [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] + \\ & + \mu \kappa_e H \mathbf{j} - \mu (\kappa_e + \kappa_i) f^{-1} H \mathbf{j}_i. \end{aligned}$$

Пользуясь уравнением (6.20), исключим dv/dt и учтем, что $p_i = p_e = (1 - f)p/(2 - f)$. Тогда

$$\kappa_e + \kappa_i) f^{-1} H \mathbf{j}_i = -f \mu^{-1} \text{grad } p_e + f [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] + \kappa_e H \mathbf{j}. \quad (6.21)$$

Подставляя найденное отсюда значение \mathbf{j}_i в уравнение (6.17), получаем

$$\begin{aligned}
 ne \mathbf{E}' + (1 - f\beta) \operatorname{grad} p_e = \mu (\kappa + \beta\kappa_i) H \mathbf{j} + \\
 + \mu (1 - 2f\beta) [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] + f^2 H^{-1} (\kappa_e + \kappa_i)^{-1} \{ [\operatorname{grad} p_e \cdot \mathbf{H}] - \\
 - \mu [[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H}] \}, \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{\kappa_e}{\kappa_i + \kappa_e}. \quad (6.23)$$

Практически κ_e всегда значительно меньше κ_i в соответствии с тем, что электроны описывают между соударениями больше витков спирали, чем ионы; таким образом, β всегда мало. При $f = 0$ уравнение (6.22) переходит в (6.4), так как величины κ_i и κ_e , зависящие от столкновений с нейтральными атомами, пропорциональны f .

Уравнение (6.22) отличается от (6.4), в частности, тем, что содержит член, пропорциональный $[[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H}]$. Он учитывает влияние магнитного поля на токи, перпендикулярные полю. Если f не очень мало, а κ , κ_i и κ_e малы, то этот член имеет наибольшую величину из всех членов, содержащих ток \mathbf{j} . Этот случай наблюдается, когда ионы, так же как электроны, имеют спиральный пробег. Таким образом, здесь можно ожидать существенного уменьшения проводимости в направлении, перпендикулярном магнитному полю. В соответствии с вышесказанным, строгий смысл этого утверждения должен быть уточнен.

Однако следует заметить, что в частично ионизованных газах имеет место особый механизм диссипации энергии электрических токов, отсутствующий в полностью ионизованном газе. Скорость \mathbf{V}_i электронов и ионов относительно нейтральных атомов определяется теми же силами, что и скорость \mathbf{V} электронов относительно ионов. Потеря скорости \mathbf{V}_i за счет соударений заряженных частиц с незаряженными приводит к дополнительной диссипации энергии электрических токов. Для заряженных частиц со спиральным пробегом из уравнения (6.21) следует, что \mathbf{j}_i в общем случае имеет величину порядка $f^2 \mathbf{j} / (\kappa_e + \kappa_i)$, т. е. гораздо больше \mathbf{j} для не слишком малых f . Таким образом, \mathbf{V}_i значительно больше \mathbf{V} , так что этот особый механизм диссипации может оказаться более сильным, чем обычная диссипация в тех случаях, когда частицы не обладают спиральным пробегом,

§ 5. Межзвездные поля

Полученные выше результаты мы применим лишь к одной задаче — к проблеме межзвездных магнитных полей.

Межзвездные газовые облака весьма разрежены, их плотность составляет около нескольких атомов на 1 см^3 . В некоторых облаках их основная компонента (водород) в сильной степени ионизована излучением ярких звезд, а температура составляет величину порядка $10\,000^\circ \text{K}$; такие горячие облака имеют обычно сравнительно резко выраженные границы. В других облаках ионизованы, причем частично, только атомы металлов, составляющие около 10^{-4} всех атомов, а температура имеет величину порядка 100°K . Можно ожидать, что давление в холодных и горячих облаках почти одинаково; таким образом, плотность холодных облаков больше, чем горячих. Примем произвольно, что плотность горячих облаков равна 1 атому в 1 см^3 , а плотность холодных составляет 100 атомов в 1 см^3 . При отсутствии магнитного поля проводимость горячих облаков была бы равна $6 \cdot 10^{-9}$ ед. CGSM, холодных — соответствовала бы $7 \cdot 10^{-12}$ ед. CGSM.

Время затухания магнитного поля для межзвездного облака радиусом 5 парсек, т. е. $1,5 \cdot 10^{19} \text{ см}$, составляет около $6 \cdot 10^{22}$ лет для горячего облака и $6 \cdot 10^{19}$ лет для холодного, если только влиянием магнитного поля на проводимость можно пренебречь. Поскольку эти времена чрезвычайно велики, в данном случае, как указывалось в гл. 5, вполне можно считать, что магнитное поле генерируется за счет турбулентного движения, пренебрегая при этом диссипацией, если даже и допустить, что турбулентность существенно увеличивает диссипацию. Если принять, что магнитное поле составляет около 10^{-5} эрстед, то величина $\omega\tau$, входящая в формулы (6.6) и (6.7), окажется порядка $5 \cdot 10^6$ для горячего облака. Для холодного же облака следует пользоваться соотношением (6.22). Входящие в него величины κ , κ_e и κ_i , т. е. $(\omega\tau)^{-1}$, $(\omega\tau_e)^{-1}$ и $(2\omega_i\tau_i)^{-1}$, имеют соответственно величину порядка $3,5 \cdot 10^{-6}$, 10^{-8} и $1,5 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, влияние магнитного поля на проводимость очень велико. В связи с этим возникает вопрос, не меняется ли при этом время затухания поля настолько, что эффект затухания становится существенным.

1. Диссипация в горячих облаках. Изменение магнитного поля определяется уравнением

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Для горячих облаков можно пользоваться формулой (6.6). Учитывая, что $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mu [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}]$ и подставляя значение \mathbf{E}' из формулы (6.6), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{E}''}{\mu} + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] \right) - \frac{1}{\sigma \mu} \operatorname{rot} \left(\mathbf{j} + \frac{\omega \tau}{H} [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] \right).$$

Используя соотношения $4\pi \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}$ и $(4\pi \mu \sigma)^{-1} = \eta$, перепишем последнее равенство в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = & \operatorname{rot} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] + \eta \nabla^2 \mathbf{H} + \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}'' - \\ & - \eta \operatorname{rot} \left(\frac{\omega \tau}{H} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Уравнение (6.24) является обобщением уравнения (1.10), отличаясь от него двумя последними членами. Поскольку в формуле (6.6) члены, содержащие \mathbf{E}'' и $[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$, значительно превышают \mathbf{j} при больших $\omega \tau$, дополнительные члены в уравнении (6.24) велики по сравнению с членом $\eta \nabla^2 \mathbf{H}$, учитывающим затухание поля.

Однако, поскольку наличие магнитного поля не повышает джоулевых потерь, можно ожидать, что добавочные члены в уравнении (6.24) не будут сказываться на времени затухания поля. В этом можно непосредственно убедиться, обобщив рассмотрение баланса энергии, проведенное в § 3 гл. 1. Скорость изменения магнитной энергии равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mu H^2}{8\pi} d\tau \equiv \frac{\mu}{4\pi} \int \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} d\tau. \quad (6.25)$$

Как следует из § 3 гл. 1, первые два члена в правой части уравнения (6.24) дают в уравнении (6.25) члены, определяющие механическую работу по растяжению силовых линий

и джоулевы потери j^2/σ на единицу объема. Последний член уравнения (6.24) дает в (6.25) слагаемое

$$\begin{aligned} & \frac{\eta}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \text{rot} \left(\frac{\omega\tau}{H} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \right) d\tau = \\ & = \frac{\eta}{4\pi} \int \text{div} \left\{ \frac{\omega\tau}{H} [\mathbf{H} \cdot [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]] \right\} d\tau, \end{aligned}$$

так как $\text{rot } \mathbf{H} \cdot [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] = 0$. Последний интеграл в соответствии с теоремой Грина равен нулю для любого поля, локализованного в конечной области. Таким образом, последний член уравнения (6.24) не влияет на закон уменьшения энергии магнитного поля.

Член, содержащий \mathbf{E}'' в уравнении (6.24), учитывает влияние токов, обусловленных эффективной электрической силой $\mathbf{E}'' = (1/ne) \text{grad } p_e$. Если температура всюду одинакова, то этот член равен нулю, так как $p_e = nkT$, где k — постоянная Больцмана; отсюда получаем

$$\text{rot } \mathbf{E}'' = \text{rot grad} \left(\frac{kT}{e} \ln n \right) = 0.$$

Если температура T не одинакова, то за счет этого члена может возникнуть некоторое начальное поле, которое будет затем усиливаться благодаря механизму генерации, как описано в § 7 гл. 5. Однако этот член не приводит к дополнительной диссипации магнитной энергии. Как видно из уравнения движения (6.20), $\text{grad } p_e$ может быть связан с магнитным полем лишь через член, пропорциональный $[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$. Поэтому член с $\text{rot } \mathbf{E}''$ в уравнении (6.24), если отвлечься от случайных флуктуаций, содержит выражение, сходное по форме с последним членом уравнения (6.24), и, следовательно, подобно этому члену не сказывается на диссипации магнитного поля.

2. Диссипация в холодных облаках. Для холодных облаков следует пользоваться уравнением (6.22), в котором величины κ , κ_i и κ_e пропорциональны плотности и обратно пропорциональны магнитному полю. Проводимость в отсутствие магнитного поля равна

$$\sigma = \frac{ne}{(\kappa + \beta\kappa_i)\mu H} \quad (6.26)$$

(выражение справа не зависит от H). Если воспользоваться выражением для \mathbf{E} из уравнения (6.22), то вместо уравнения (6.24) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = & \operatorname{rot} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] - \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma \mu} \right) + \operatorname{rot} \left[\frac{1}{ne \mu} \left\{ (1 - f \beta) \operatorname{grad} p_e - \right. \right. \\ & - \mu (1 - 2f \beta) [\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] - \frac{f^2}{H (\kappa_e + \kappa_i)} \left. \left. \left([\operatorname{grad} p_e \cdot \mathbf{H}] - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \mu [[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H}] \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Чтобы найти скорость изменения магнитной энергии, нужно подставить (6.27) в (6.25).

Первые два члена в правой части уравнения (6.27) имеют обычный вид, причем второй член, как и раньше, дает джоулевы потери j^2/σ в единице объема. Первые два члена в фигурных скобках соответствуют членам, содержащим \mathbf{E}'' и $[\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]$ в (6.24), и подобно этим членам не сказываются на диссипации энергии магнитного поля. За счет члена в фигурных скобках, пропорционального $[[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H}]$, к скорости изменения магнитного поля добавляется слагаемое

$$\frac{\mu}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \left\{ -\frac{f^2}{ne H (\kappa_e + \kappa_i)} [[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] \cdot \mathbf{H}] \right\} d\tau.$$

Используя теорему Грина и соотношение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}$, полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$- \int \frac{\mu f^2}{ne H (\kappa_e + \kappa_i)} |[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]|^2 d\tau. \quad (6.28)$$

Член уравнения (6.27), пропорциональный $[\operatorname{grad} p_e \cdot \mathbf{H}]$, может частично скомпенсировать член, определяемый формулой (6.28), так как

$$\operatorname{grad} p_e = \frac{1-f}{2-f} \operatorname{grad} p,$$

а $\operatorname{grad} p$, согласно уравнению движения, имеет составляющую, пропорциональную $[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}]$. Однако в рассматриваемом случае $1 - f$ мало, так что эта составляющая играет значительно меньшую роль, чем член уравнения (6.28).

В общем случае отношение дополнительной диссипации, определяемой членом уравнения (6.28), к обычной диссипации с плотностью

$$\frac{j^2}{\sigma} = \frac{(\kappa + \beta\kappa_i)\mu H j^2}{pe}$$

имеет величину порядка

$$\frac{1}{(\kappa + \beta\kappa_i)(\kappa_i + \kappa_e)},$$

или

$$[\kappa(\kappa_i + \kappa_e) + \kappa_e \kappa_i]^{-1}.$$

Полагая $\kappa = 3,5 \cdot 10^{-6}$, $\kappa_e = 10^{-8}$ и $\kappa_i = 1,5 \cdot 10^{-6}$, мы получаем, что это отношение равно $2 \cdot 10^{11}$. Таким образом, влияние магнитного поля на проводимость столь велико, что время затухания поля в холодном облаке уменьшится от $6 \cdot 10^{19}$ до $3 \cdot 10^8$ лет. Такое время хотя и очень велико, но не чрезмерно велико в космических масштабах. Так, возраст солнечной системы составляет $3 \cdot 10^9$ лет. Следовательно, уменьшение времени затухания поля может означать, что для холодных облаков диссипация энергии магнитного поля, обусловленная конечной проводимостью, играет существенную роль. Исключение представляет случай, когда поле близко к такому, в котором силы, действующие на вещество, отсутствуют (т. е. $[\mathbf{j} \cdot \mathbf{H}] = 0$, электрические токи текут вдоль силовых линий магнитного поля). Подобные поля рассматривались Лундквистом, Шлютером и другими исследователями, однако не было найдено никаких убедительных доказательств того, что межзвездные поля должны иметь такую структуру.

Фактически магнитное поле может привести к существенному увеличению диссипации магнитной энергии и в горячих облаках, если в них есть хоть небольшая примесь неионизованного газа. Дополнительная диссипация в единице объема, определяемая формулой (6.28), пропорциональна $f^2/n n_a$. При принятых выше значениях плотностей газа эта величина для горячего облака приблизительно в f_h раз меньше, чем для холодного, где f_h — значение f для горячего облака. Это означает, что диссипацией можно скорей пре-

небрежь в горячем облаке, чем в холодном. Но это еще не значит, что она вообще несущественна. Весьма желательно, конечно, чтобы при анализе вопроса о происхождении межзвездных магнитных полей учитывалась диссипация в холодных облаках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cowling T. G., Proc. Roy. Soc., **183A**, 453 (1945).
2. Piddington J. H., Month. Not. Roy. Astr. Soc., **94**, 638, 651 (1954).
3. Schlüter A., Zs. Naturforsch., **5a**, 72 (1950); **6a**, 73 (1951).
4. Spitzer L., Jr., The Physics of Fully Ionized Gases, New York—London, 1956. (Имеется перевод: Л. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| От редактора перевода | 5 |
| Предисловие | 7 |
| Глава 1. Общие принципы и простейшие приложения | 9 |
| § 1. Введение | 9 |
| § 2. Уравнения | 10 |
| § 3. Электродинамические эффекты | 12 |
| § 4. Механические эффекты | 18 |
| § 5. Параллельное течение | 22 |
| § 6. Магнитная жесткость | 27 |
| Литература | 29 |
| Глава 2. Магнитная гидростатика | 30 |
| § 1. Задачи магнитной гидростатики | 30 |
| § 2. Равновесие солнечных пятен | 32 |
| § 3. Лучи и волокна в солнечной атмосфере | 34 |
| § 4. Магнитогидростатическая устойчивость | 40 |
| § 5. Спиральные ветви галактик | 42 |
| Литература | 44 |
| Глава 3. Волновое движение | 45 |
| § 1. Магнитогидродинамические волны | 45 |
| § 2. Исследование магнитогидродинамических волн | 47 |
| § 3. Экспериментальные данные | 53 |
| § 4. Вращение звезд | 56 |
| § 5. Теория солнечных пятен Альфвена | 62 |
| § 6. Звезды с переменным магнитным полем | 66 |
| Литература | 68 |

| | |
|---|-----|
| Глава 4. Магнитное поле и неустойчивость | 69 |
| § 1. Виды неустойчивости | 69 |
| § 2. Неустойчивость течения | 70 |
| § 3. Конвекция | 78 |
| § 4. Темный цвет солнечных пятен | 88 |
| Литература | 90 |
| Глава 5. Теории генерации поля | 91 |
| § 1. Постановка задачи | 91 |
| § 2. Симметричные поля | 92 |
| § 3. Теория Эльзассера | 94 |
| § 4. Теория Балларда | 98 |
| § 5. Механизм генерации поля | 102 |
| § 6. Турбулентные движения | 105 |
| § 7. Равномерное распределение энергии | 108 |
| Литература | 114 |
| Глава 6. Ионизованные газы | 115 |
| § 1. Влияние молекулярной структуры | 115 |
| § 2. Токи в полностью ионизованном газе | 116 |
| § 3. Проводимость | 119 |
| § 4. Частично ионизованные газы | 121 |
| § 5. Межзвездные поля | 125 |
| Литература | 130 |

Т. Каулинг
МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА
 Редактор *И. Г. НАХИМСОН*
 Технический редактор *Н. А. Иовлева*
 Корректор *Н. Т. Янова*

Сдано в производство г. 11/V-1958 Подписано к печати 18/VI-1959 г.
 Бумага 84x108^{1/32} = 2,1 бум. л., 6,8 печ. л. Уч.-изд. 6,0
 Изд. № 2/3923 Цена 6 р. 20 к. Зак. 486

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
 Москва, Ново-Алексеевская, 52.